This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

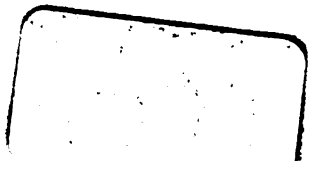
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

TECHNISCHE MECHANIK



ENG
TA350
L56
1297
TIMO-
SHENKO
COLL

ENGINEERING LIBRARY

Die Grundlehren

der

technischen Mechanik

mit specieller Berücksichtigung der

Vectorentheorie.

Herausgegeben

von

A. LIPPMANN & L. PRANDTL

MÜNCHEN 1897.

DRUCK V. KARL & WEIGMANN, MÜNCHEN.

Vorwort.

Das vorliegende Werkchen verdankt seine Entstehung einer Seminararbeit des ersten der beiden Unterzeichneten und war ursprünglich nur als Repetitorium für den Privatgebrauch gedacht.

Als nun in freundschaftlicher Weise gebeten wurde, die Arbeit herauszugeben, weil der Grundriss an vielen Anstalten gerne benützt, schien es uns zweckmässig, in den einzelnen Teilen eines Werkes nach dem deutschen Lehrmittel, in welchem die Gesetze der Mechanik in möglichst einfacher Weise mit Hilfe der Vektorenrechnung abgeleitet werden, wie dies seitens des Verfassers an der hiesigen technischen Lehrstelle Dr. A. Föppl geschieht — überdies ist der genannte Verfasser die Schrift mit Rücksicht auf den allgemeinen Gebrauch teils zu überarbeiten, teils umzugestalten.

Die Anordnung und Anordnung des Stoffes schliesst sich in der Hauptsache an Föppl'schen Vorlesungen über „Mechanik" I. Teil an. Die einzelnen Abschnitte sind vollständig

ausgearbeitet. Wenn freilich sein Index, der die Darstellung seiner Vorlesungen ergänzen soll, so glänzend, wie die Verfasser, durch der Vollständigkeit der Arbeit nicht gestanden, da es manchmal geradezu als Vorgehen zu bezeichnen wäre, eine präzise und klare Ausdrucksweise als die Vogel'sche finden zu wollen.

Als Einleitung ist der Abschnitt des Kapitel über „die elementaren Operationen der Rechnung mit Vektoren" der Vogel'schen Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität mit Genehmigung der Verfasser beigegeben, für welche sich Einleitung die Unterzeichneten ihren geschätzten Lesern hiermit ihren ergebensten Dank auszusprechen. —

Sollte dies Werkchen Anklang finden, so beabsichtigen die Verfasser einen abschließenden Teil folgen zu lassen, der in der Hauptsache den Stoff der Dynamik behandeln wird.

München, Pfingsten 1897.

Die Verfasser

A. Lippmann und C. Brandt.

Die elementaren Operationen der Rechnung mit Vectoren.

(Aus Dr. A. Föppl, Einführ. in die Maxwell'sche Theorie der Electricität. I. Abschnitt, Capitel 1. — Leipzig. Teubner 1894.)

Begriff des Vectors.

Die meisten in der Physik vorkommenden Größen besitzen außer ihrer Dimension noch eine Richtung im Raume. Diese Größen nennt z. B. die Geschwindigkeit, Beschleunigung u. a. nennt man gerichtete oder Vectorgrössen. Unter einem Vector versteht man demnach eine Größe, der eine Richtung im Raum zukommt. Im Gegensatz zu den Vectoren bezeichnet man Größen, denen eine Richtung im Raum nicht zukommt z. B. die Temperatur die Masse u. a. als Scalaren.

Da es jedoch bei beiden genannten Größen auf die Dimensionen derselben ankommt, so sind demselb zwei Vectoren unter sich oder zwei Scalaren nur nicht gleichartige Größen; niemals aber sind ein Vektor und ein Scalar Größen gleicher Art. — Der einfachste Scalar ist eine absolute Zahl. Trifft man eine Festsetzung über die zu Grunde gelegten Maßeinheiten sowie über die geometrischen Dimensionen der auftretenden Größen, so lassen sich alle Scalaren in diesem einfachsten ausdrücken.

Der einfachste Vector ist eine Strecke, d. i. eine gerade Linie von bestimmter Länge, versehen mit einer bestimmten Richtung oder einem bestimmten Sinn, der durch einen auf sie gesetzten Pfeil zum Ausdruck gebracht werden kann. Alle Vectoren lassen sich, analog wie die Scalaren durch Zahlen, durch Strecken darstellen, sobald man einen bestimmten Maßstab festgesetzt hat, nach welchem die Strecken aufzumessen sind.

In der Vectorenrechnung gelten zwei parallele Strecken, von gleicher Länge und gleichem Sinn ohne Rücksicht auf ihre Lage im Raum in jeder Hinsicht als gleich.

Wollte man mit Hülfe der gewöhnlichen Algebra eine Aufgabe, in welcher Vectoren vorkommen, lösen, so müsste man jeden Vector durch 3 scalare Größen, etwa durch seine 3 Projectionen auf ein räumliches Coordinatensystem, darstellen. Der Vortheil des Rechnens mit Vectoren besteht nun aber darin, dass man an Stelle der 3 Gleichungen, die man im vorliegenden Falle erhielte, mit nur einer auskommt.

Die Größe eines Vectors, abgesehen von dessen Richtung, nennt man den Tensor des Vectors; dieser ist also stets eine scalare Größe.

Im Folgenden sollen Vectoren stets durch Lettern des deutschen Alphabets gekennzeichnet werden, während für Scalaren die gewöhnlich lateinische oder griechische

Größen gemessen werden sollen. Wir bezeichnen also mit

$\mathfrak{A}$ oder a einen Vector und mit

A oder a einen Tensor.

Soll irgend eine Vectorgröße z.B. eine Kraft durch eine Strecke dargestellt werden, so kann die algebraische unter Zugrundlegung eines bestimmten Kräftemaßstabes durch die Gleich.

$$\mathfrak{A} = a \cdot A \qquad (1.)$$

geschehen. Der Gleichheitszeichen soll hier einen allgemeineren Sinn als in der gewöhnlichen Algebra, indem es sich also nicht um das scalaren Größen sondern auch die Richtung der Größen handelt.

Gleichung (1.) definiert die Zerlegung eines Vectors in einen zweiten Vector und in einen Scalar. Setzt man in diese Gleichung $a = 1$ so wird A zum Tensor der Verbindung der Zerlegung eines Vektors in einen Scalar und in einen anderen Vektor, dem verschiedene Richtung hat. Man kann entweder a als Einheitsvektor annehmen, d.h. man kann a gleich der Maßeinheit, welche für den Vektor $\mathfrak{A}$ angenommen ist, annehmen, wobei also dann der Tensor durch eine absolute Zahl angegeben wird z.B. ein Dyn in der betreffenden Richtung. Andrerseits kann man auch den Tensor A einer physikalischen Dimension beilegen, der Vektor a ist dann nicht von gleicher Art mit dem Vektor $\mathfrak{A}$. Verlangt z.B. $\mathfrak{A}$ eine Geschwindigkeit, so hat a die Dimension $\frac{cm}{sec}$; man kann dann a als (gerichtete) Strecke

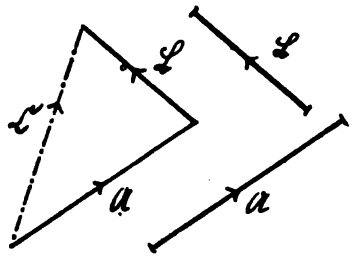
müssen, so dass ab die Dimension cm hat, während für A die scalare Dimension sec^{-1} bleibt. Dabei hat man bei einer solchen Festlegung immer noch die Wahl, ob man analog der Längeneinheit machen will, so dass dann A den Faktor für die gewählte Festlegung darstellt oder ob man die Größe des Vektors A ebenfalls durch a zur Darstellung bringen soll. Im letzteren Falle hat der Scalar A nur noch die Bedeutung eines Maßstabverhältnisses, das bei der Darstellung der Vektoren von der Art A zu Grunde gelegt wird. Diese Art der Festlegung ist namentlich bei der geometrischen Behandlung statischer Aufgaben (Graphostatik) allgemein im Gebrauche. In der Algebra der Vektoren setzt man gewöhnlich die erste Festlegung voraus (so dass a = 1 ist), ohne dass jedoch zwischen beiden ein prinzipieller Unterschied besteht. Wenn die Art der Festlegung nicht schon aus dem Zusammenhange hervorgeht, braucht es in jedem Falle besonders beim Aufstellen der Gleichung (1) einer bestimmten Festsetzung.

Die Addition von Vectoren.

Zwei gleichgerichtete Vektoren gleicher Art werden addiert, indem man einfach die Summe ihrer Tensoren nimmt, wobei die Richtung ungeändert bleibt. Bei entgegengesetzten Richtungen verwandelt sich der Begriff der numerischen Summe in den der algebraischen, welcher die Subtraction in sich schließt. Vektoren ungleicher Art z. B. eine Kraft u. eine Geschwindigkeit können nicht addirt werden. Vektoren gleicher Art, die sich nur durch ihre Richtung und Größe von einander

unterscheiden, wie z. B. Kräfte lassen sich mit Strecken addiren (vgl. Seite 13-14) indem man sie der Richtung und Grösse nach in beliebiger Reihenfolge aneinanderreiht und die Schlusslinie zieht. Es ist also:

$$L = A + L = L + A \quad (2)$$



Wir nennen L die graphische oder geometrische Summe der Vectoren A und L (Vectorensumme) bezüglich der Summierung beliebig vieler Vectoren gilt das im Abschnitt I über die graphische Summa Gesagte. Sind die Vectoren A und L parallel so geht die geometrische Summe in die algebraische über.

Die geometrische Summirung von Vectoren andrer Art lässt sich auf die von drei Vectoren zurückführen, indem man mit Hülfe von Gleichung (1.) die Vectoren durch Vectoren darstellt. Man sagt:

$$A = m \cdot a \; ; \; L = m \cdot b$$

wobei m ein Massstabverhältniss und a und b Vectoren sind, dann ist:

$$A + L = ma + mb = m(a+b)$$

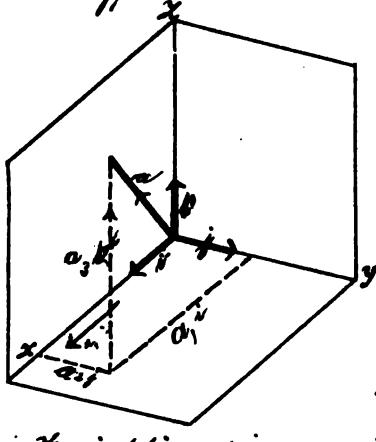
womit die Aufgabe auf die geometrische Summe der Vectoren a + b zurückkommt. —

Die Grundvectoren i, j und k.

Alle übrigen Vectoren lassen sich auf den Vorgegebenen durch Scalaren und Strecken ausdrücken. Alle Strecken

lassen sich nun miteinander auf 3 Grundstrecken, die man beliebig wählen kann (abgesehen davon, daß ihre Richtungen nicht alle in einer Ebene enthalten sein dürfen) zurückführen. Daraus ergibt sich, daß sich alle Vektoren mit Zerlegungen von Vektoren auf 3 Grundvektoren ableiten lassen. Man wählt hierzu 3 rechtshändig aufeinander senkrecht stehende Vektoren von der Länge 1 und bezeichnet sie mit i, j und k.

Die Grundvektoren bilden dann ein rechtshändiges Koordinatensystem miteinander und zwar soll im folgenden stets ein sog. Rechtssystem zu Grunde gelegt werden (vgl. Seite XII d. f. wie drehung wenn der i erster der j Richtung soll den Drehsinn einer rechtsgängigen Schraube darstellen.



Ein Drehsinn von der j nach der i wie da bei gleichbleibendem Daumenrichtung in der k Richtung ein Linkssystem ergeben. Um nun einen beliebig gerichteten Vektor a auf die Grundvektoren zurückzuführen, projiziert man diesen zunächst auf die XY (oder ij) Ebene und verlegt die Projektion in zwei Komponenten nach den Koordinatenachsen. Wir können dann die X Komponente von a durch ein Vielfaches des gleichgerichteten Grundvektors i darstellen, etwa durch $a_1 i$, wenn a_1 den Faktor darstellt. Die Addition der geometrischen Summe (gl. (2.)) liefert dann auf gl. (3.)

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad (3.)$$

wobei die Zahlen der Komponenten $a_1 a_2 a_3$ mit dem Faktor a des ganzen Vektors durch Multiplikation mit dem entsprechenden Richtungseinheitsvektor entstehen. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz besteht noch die Beziehung:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad (4.)$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß sich in der Tat jede Strecke auf die Grundeinheiten zurückführen läßt. Bezeichnen wir mit m wieder das Maßstabverhältnis, so setzen wir für irgend einen anderen Vektor A

$$A = mA = ma_1 i + ma_2 j + ma_3 k$$

wobei die Vektoren $ma_1 i$, $ma_2 j$, $ma_3 k$ die Komponenten des Vektors A nach den 3 Richtungen i, j, k bilden, die Zahlen dieser Komponenten ma_1, ma_2, ma_3 bezeichnet man der Kürze halber meist auch schlicht als Komponenten mit A_1, A_2, A_3 und schreibt dann:

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \qquad (5.)$$

Damit ist auch A auf die 3 Grundeinheiten zurückgeführt. — Bezüglich der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der einzelnen Glieder gelten für die geometrische Summe dieselben Regeln wie für die algebraische:

Sei nun aber irgend eine Vektorsumme $A + L + L'$, so kann nun unter Anwendung von (5.) und eine algebraische Zusammenfassung geschrieben werden: (6)

$$A + a + L = (A_1 + B_1 + C_1) i + (A_2 + B_2 + C_2) j + (A_3 + B_3 + C_3) k$$

woraus sich die Vertauschbarkeit der Glieder in A B + C sofort ergibt.

Ebenso ist es gleichgültig, ob man z. B. A, wieder in Schnitt, welcher von den beiden Factoren wenigstens einer scalar ist; der Sinn ist in jedem Falle der in Gl. (1) dafür gesetzte.

Das scalare Product.

Ein Product aus zwei Vectoren A und L kann auf zwei verschiedene Arten gebildet werden. Das eine wird „scalares" Product genannt, weil sein Ergebniss eine scalare Grösse liefert, — ihm also keine Richtung im Raume zukommt — und es das Product der gewöhnlichen Algebra aus zwei Factoren in sich schliesst. Das scalare Product ist definirt durch die Gl.

$$A \cdot L = L \cdot A = A B \cos(A L) \qquad (2)$$

worin $\cos(A L)$ den cos des zwischen den Richtungen der Factoren A und L eingeschlossenen Winkels im gewöhnlichen Sinne der Trigonometrie bedeutet. Sind A und L gleichgerichtet, so wird $A L = A B$ und sind sie entgegengesetzt gerichtet, so ist, wie in der gewöhnlichen Algebra, ihr Product $= -A B$, weil der $\cos(A L)$ dann den Werth -1 annimmt.

Bilden die Richtungen der Vectoren miteinander einen rechten Winkel, so wird ihr scalares Product nach Gl. (2) gleich 0. Wenden nun die Grundvectoren

i, j, k, so erfüllt man auf demselben Grunde

$$ij - ik - jk = 0 \qquad (8.)$$

dagegen ist

$$i.i - j.j - k.k = 1 \qquad (9.)$$

Setzt man die Vektoren A und L auf die Grundvektoren gerückt, und setzt dann die Multiplikationen nach den Multiplikationsgesetzen der Algebra aus, so erfüllt man mit Berücksichtigung von (8) und (9)

$$AL = (A_1 i + A_2 j + A_3 k)(B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$
$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10.)$$

der hier für AL gefundene Wert stimmt mit dem in (7.) festgesetzten vollständig überein, da nach dem bekannten Satze:

$$\cos(AL) = \cos(AX)\cos(BX) + \cos(AY)\cos(LY) + \cos(AZ)\cos(LZ) \qquad (11.)$$

ist.

Dieser Satz läßt sich nun unmittelbar durch den Vergleich von (10.) mit (7.) beweisen, nach dem wir voraussetzen, daß die gewöhnlichen Multiplikationsgesetze für die scalaren Produkte gelten.

Hiervon überzeugt man sich aber leicht, wenn man ausgeht von dem Vektorprodukte, durch die im folgenden kurz angedeutete Reihe von Schlüssen. Ist $L = A + L$ und a ein irgendwie gerichteter Einheitsvektor, dann soll aL oder $a(A+L) = aA + aL$

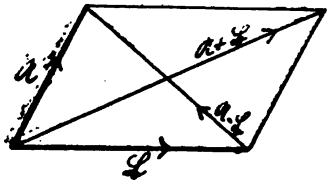
sein. Nach (7.) ist aber $a\,d$ gleich der Projektion von c auf a und gleicher gilt von $A\,a$ und $a\,L$. Aus der unmittelbaren Auffassung ergibt sich aber, daß in der That die Projektion von c auf jede beliebige Richtung gleich der algebraischen Summe der Projektionen von $A\,a$ u. $a\,L$ auf dieselbe Richtung sein muß, woraus die Behauptung folgt. Durch Multiplikation mit irgend einem Faktor können wir den Einheitsfaktor u in einer beliebig anderen Art darstellen, sodaß der Satz daher ebenfalls zutrifft. Ferner ist:

$$(a+L)(c+d) = (a+L)c + (a+L)d$$
$$= ac + Lc + ad + Ld \qquad (11a)$$

etc.

Einfache Anwendung.

Es seien A und L die beiden Seiten eines Parallelogramms, so ist die von dem gemeinsamen Anfangspunkte von A und L ausgehende Diagonale nach der Definition der Faktorsumme gleich $A+L$, die andere gleich $A-L$.



Wir haben ferner

$$(A+L)^2 = A^2 + 2AL + L^2$$
$$(A-L)^2 = A^2 - 2AL + L^2$$

Durch Addition beider Gleichungen

erfüllt man:

$$(A+L)^2+(A-L)^2=2A^2+2L^2$$

Nach Gl(7) ist aber das Quadrat eines Vektors gleich dem Quadrate seines Tensors; es ist damit der Satz bewiesen, daß die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate über alle vier Seiten ist. Ebenso findet sich:

$$(A+L)^2-(A-L)^2=4AL$$

in Worten: das scalare Product aus den Seiten eines Parallelogramms ist gleich dem vierten Teile von der Differenz der Quadrate der Diagonalen. Für ein rechtwinkliges $\Box gr$ werden die Diagonalen gleich lang und das scalare Produkt der Seiten gleich Null.

Das Vectorprodukt.

Aus den beiden Vektoren A und L kann man einen neuen Vektor L' ableiten durch eine der vorigen völlig entsprechenden Operation. Man nennt diesen neuen Vektor L' das Vectorprodukt aus A und L und schreibt

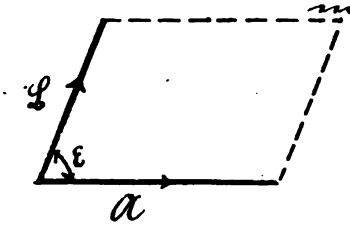
$$L'=VAL \qquad (12)$$

Man sieht diese Operation ebenfalls als eine Produktbildung an, die für dieselbe im Allgemeinen die gewöhnlichen Multiplikationsregeln gültig bleiben, jedoch mit einer wichtigen Ausnahme, die sich sofort zeigen wird.

Um das Vectorproduct aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abzuleiten, müssen wir zunächst die Richtung von $\mathfrak{C}$ festsetzen und zwar in dem Sinne, dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zu einem Rechtssysteme (cf. Pag VI) im Raume führt. Der Factor von $\mathfrak{C}$ ist aber gleich dem Producte von A und B und dem Sinus des von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eingeschlossenen Winkels. Ist dieser Winkel ε so hat man demnach

$$C = AB \sin \varepsilon$$

oder gleich dem Inhalte des durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten Parallelogramms. Bei den in der Figur gemachten Richtungen steht die Richtung von $\mathfrak{C}$ senkrecht zur Papierfläche, der Pfeil geht auf den Leser zu.



Werden nun die Richtungsfolge der beiden Factoren im Vectorproducte umkehrt, kehrt sich der Sinn des Vectorproductes um, es fällt die entgegengesetzte Richtung, denn es muss die Reihenfolge $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem im Raume ergeben. Demnach ergiebt sich der soeben ausgesprochene Lehrsatz von der gemischten Multiplicationsvertauschung; es ist nämlich

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -V\mathfrak{B}\mathfrak{A} \qquad (14.)$$

das Vectorproduct aus zwei geometrischen Summen

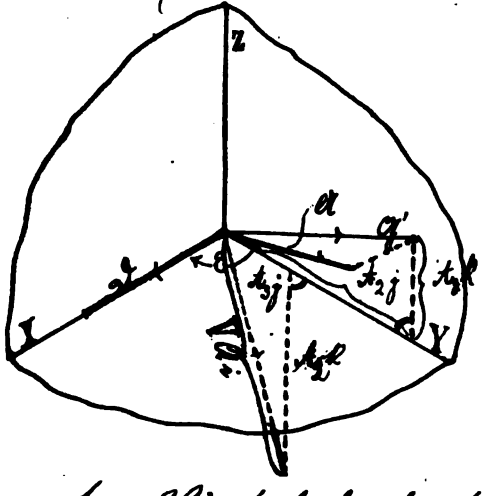
fingegen wird nach denselben Regeln wie das Pro-
dukt aus zwei algebraischen Summen gebildet.

Um dies zu zeigen soll zunächst bewiesen werden,
dass

$$V(a+b)\,d = Vad + Vbd \ldots\ldots \quad (15.)$$

ist. Der Kürze halber sei $a+b=c$ gesetzt.

Zur Vereinfachung der Ableitung werde ein Koor-
dinatensystem gewählt, dessen X- oder i Achse in
die Richtung des Vektors d fallen möge. Der Vektor
Vad fällt dann nach Definition in die YZ Ebene
und steht ziemlich senkrecht auf d daher möglichst gleich
dem Vektor δ sein. Der Vektor von δ ist gleich $A \sin\varepsilon\, k$.
$= A \sin(a,d)$.



Trägt man daher diesen Vek-
tor rechtwinklig zu δ ab, so
muß er nur noch mit dem
Vektor D multiplizirt wer-
den um sofort das Vad anzu-
geben. Nun war $\delta = A_2 j + A_3 k$
der Vektor den man erhält,
wenn man δ um einen rech-
ten Winkel dreht, ist daher (v. Fig) gleich $A_3 j - A_2 k$;
demnach ist

$$Vad = DA_3 j - DA_2 k$$

dies bleibt gültig für jede Richtung die wir dem Vektor a geben mögen.

Hiernach daher auch

$$V\mathfrak{L}\mathfrak{d} = DB_3 j - DB_2 \mathfrak{k} \text{ und}$$
$$V\mathfrak{C}\mathfrak{d} = DC_3 j - DC_2 \mathfrak{k}$$

Berücksichtigen wir aber, daß $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} + \mathfrak{L}$ und daher auch $C_2 = A_2 + B_2$ und $C_3 = A_3 + B_3$ war, so folgt aus dem Vergleiche der gefundenen Werthe unmittelbar die aufgestellte Behauptung.

Ferner ist

$$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{L})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = V\mathfrak{a}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) + V\mathfrak{L}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$$
$$= V\mathfrak{a}\mathfrak{c} + V\mathfrak{a}\mathfrak{d} + V\mathfrak{L}\mathfrak{c} + V\mathfrak{L}\mathfrak{d} \ldots\ldots \quad (16.)$$

u. s. f.

Der soeben bewiesene Satz lässt sich dazu verwenden, um das Vectorproduct bei beliebigen Factoren auf die Grundfactoren zurückzuführen. Aus der Definition des Vectorproductes folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & Vij = k;\ Vjk = i;\ Vki = j \\ 2.) & Vji = -k;\ Vkj = -i;\ Vik = j \\ 3.) & Vii = Vjj = Vkk = 0 \end{array}\right\} \quad (17.)$$

Gl. $(17.)_3$ besagt, daß das Vectorproduct aus zwei gleichgerichteten Vectoren stets Null ist, weshalb man in einer Veranlassung hat, von dem Vectorquadrate eines Vectors zu reden.

Unter Berücksichtigung der in (17.) gegebenen Beziehungen erhält man beim Multiplicieren:

$$\left.\begin{aligned} Vab &= V(A_1 i + A_2 j + A_3 k)(B_1 i + B_2 j + B_3 k) \\ &= i(A_2 B_3 - A_3 B_2) + j(A_3 B_1 - A_1 B_3) + k(A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned}\right\} 18.$$

oder in Determinantenform:

$$Vab = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad (18^a.)$$

Anwendungen.

Da man bei Anwendung der Vektor-Algebra von dem jeweiligen Anfangspunkt jedem Koordinatensystem ist und der Übergang zu einem solchen beliebig gewählten Systemrichtungen stets ja eigentliche Koordinatentransformation gestattet kann, kommen Transformationen nur in andere Koordinatensysteme selten vor. Wird eine solche Transformation doch erforderlich, so lassen sich die sich zu bietenden Lösungen mit Hilfe der Vektorprodukte in viel einfacherer Weise als mit anderen Mitteln finden.

So mögen die beiden Rechtssysteme XYZ und $X'Y'Z'$ vorliegen, deren Ursprung zusammenfallen soll. Zwischen je einer Achse des einen und der anderen Achsensystems hat man dann im ganzen 9 Winkel, deren cosinus die aus der folgenden Tabelle ersichtlichen Zusammenstellungen $(\alpha_1, \beta_1 \dots)$ erhalten mögen:

	X	Y	Z
X'	α_1	α_2	α_3
Y'	β_1	β_2	β_3
Z'	γ_1	γ_2	γ_3

Wir können nun mit Hülfe dieser 9 Winkelkosinus die Coordinaten xyz irgend eines Punktes in dem einen Coordinatensystem durch die Coordinaten $x'y'z'$ in dem anderen und umgekehrt ausdrücken, es ist also:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \right.$$

Es können jedoch von den 9 Winkelkosinus nur 3 will-kürlich angenommen werden; die übrigen sind von diesen abhängig. Um die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen abzuleiten, nehmen wir zwei Systeme von Grundvektoren $i\,j\,k$ und $i'j'k'$ an, die mit den Coordinatensystemen gleich gerichtet sind. Zwischen diesen bestehen dann dieselben Gleichungen wie zwischen xyz und $x'y'z'$; demnach ist:

$$i' = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \text{ und } i = \alpha_1 i' + \beta_1 j' + \gamma_1 k' \text{ u. s. f.}$$

aus denen die erste uns aussagt, daß i' gleich der Vektorsumme seiner Komponenten nach den Richtungen $x\,y\,z$ sein muß.

Das scalare Produkt von i' und j' aber von i u. k' u. s. f. muß Null sein, da diese senkrecht zu einander stehen und wir erhalten daher 6 Gleichungen von der Form der beiden folgenden:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$

Verlangt man ferner, daß das Quadrat jeder Grundeinheit = 1 sein muß, so erfüllen 6 weitere Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \quad \text{u. s. f.}$$

Zu diesen Gleichungen treten noch einige andere, zu deren Ableitung sich besonders die Anwendung des Vektorprodukts eignet. Nach Gl. (17) ist $V\,ij$ = k und daher, wenn wir $i\,j$ k in $i\,j\,k$ ausdrücken und das Vektorprodukt nach Gl. (18) entwickeln:

$$i(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + j(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + k(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei Gleichungen:

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2; \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3; \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

Ebenso erhält man aus $V\,ij = k$, wenn man auf die Grundeinheiten $i\,j\,k$ zurückgeht und wie vorher verfährt

$$\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \quad \beta_3 = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2; \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

Dazu kommen noch die durch cyclische Vertauschung aus diesen hervorgehenden Gleichungen.

Die Determinante aller 9 Winkelkosinus ist, wie nun leicht zu erkennen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

Nun entwickelt man diese neun Unterdeterminanten von $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ und benutzt die abgeleiteten

(durch cyclische Vertauschung aus den angeschriebenen sechs vorgegangenen) Beziehungen, so geht die Determinante auf den Werth $a_1^2+a_2^2+a_3^2-1$ zurück; diese Beziehungen gelten aber nur, wenn beide Systeme, wie hier angenommen, Rechtssysteme (oder allgemein Systeme gleicher Art) sind. Für den Übergang aus einem Rechtssystem in ein Linkssystem würde die Determinante den Werth -1 annehmen, was leicht zu sehen ist, wenn man bedenkt, dass das Vektorprodukt $V\dot{i}\dot{j}'$ gleich $-k'$ wird, wenn $i'j'k'$ ein Linkssystem bilden.

Producte aus 3 Vectoren.

Durch zweimalige Anwendung der vorgegebenen Productbildungen kann man auf drei (nach der Reihenfolge nach) gegebenen Vektoren Producte verschiedenen Arten aus 3 Faktoren ableiten.

Es lassen sich also aus den 3 Vectoren A, L, λ, wenn man die angegebene Reihenfolge beibehält, die folgenden Producte ableiten:

1) $\quad s = A.L\lambda; \quad s' = AL.\lambda$

2) $\quad E = AVL\lambda; \quad E' = VAL.\lambda$

3) $\quad F = VAVL\lambda$

Zu 1) wird ein Vektor mit dem scalaren Product aus zwei anderen Vektoren multiplicirt (also gewöhnliche Multiplikation); das Resultat ist wieder ein

Vektor $\mathfrak{d}$, der mit $\mathfrak{A}$, oder $\mathfrak{d}'$, der mit $\mathfrak{C}$ gleichgerichtet ist. Daran ist schon zu erkennen, daß $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ gegeneinander verschiedene Werthe sind. Die Schreibweise $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ an Stelle $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}.\mathfrak{C}$ hätte demnach keinen Sinn, denn die Zusammengehörigkeit der betreffenden Faktoren kann nur durch Klammern gekennzeichnet werden, wie folgt:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{A}.\mathfrak{B}\mathfrak{C} \text{ oder } \mathfrak{d} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \text{ u.s.f.}$$

In 2) haben wir es mit dem scalaren Produkte aus einem Vektor und dem Vector-produkte der beiden andern Vektoren zu thun. Um den Sinn der Operation besser zu kennzeichnen ist es vortheilhafter, für E' zu schreiben $(VAB).C$

Die Produktbildung liefert für die Scalaren E und E'. Während $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ völlig verschieden waren, sind E und E' einander gleich; es ist

$$AVBC = BVAC = CVAB \qquad (19.)$$

Diese Gleichung spricht einen wichtigen Satz aus, dem noch hinzuzufügen ist, daß jedes dieser 3 Produkte den Inhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zusammengesetzten Parallelepipeds angibt. Zum Beweise braucht man, daß nach Gl. (13) Seite XII der Faktor von VBC den Inhalt des aus den Kanten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildeten Dreiecks des Parallelogramms darstellt, die Richtung von VBC steht dagegen senkrecht zu diesem Parallelogramm und liegt

mit A auf der gleichen Seite; dieser Fluch wenn die Aufeinanderfolge der Kanten A, L, L zu einem Rechtssystem führt. Das skalare Produkt $AVLL$ wird nun negativ, wenn man den Finger von A mit dem Finger von VL und dem cos des Winkels zwischen A und jener Normalen multipliziert. Das Produkt aus A und diesem cos ist aber die Projektion von A auf die Normale d. h. die zur Tiefenfläche gehörige Höhe des Parallelepipeds. Hiermit ist bewiesen, daß $AVLL$ positiven Wert hat, wenn die Kantenaufeinanderfolge ALL zu einem Rechtssysteme führt, im andern Falle negativen Wert hat und endlich, daß die Gleichung (19) erfüllt ist, indem für jedes der beiden anderen Produkte dieselben Schlüsse gelten u. weil die Aufeinanderfolge LAL oder LLA gleichfalls zu Rechtssystemen führen, wenn dies für ALL der Fall ist.

Natürlich ist auch, wie schon aus Gl. 14 Seite XII hervorgeht

$$AVLL = -AVLL.$$

Der Inhalt des in Gl (14) ausgesprochenen Satzes hätte sich auf anschaulichem Wege noch einfacher ergeben lassen, wenn es sich um den Inhalt dieses Satzes gehandelt hätte. Es wäre nur nötig gewesen, die Vektorprodukte nach Gl (18) zu entwickeln und dann das skalare Produkt nach Gl (10) auszuführen. Man wäre dann in allen Fällen zu demselben Resultate gelangt, wel-

Da wie aus Gl. 18a zu entnehmen ist, sich in Form der Determinante aller Komponenten aufschreiben lässt:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{V}\mathfrak{a}\mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{a} - \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (20.)$$

Betrachtet man nun mittels des Vektorprodukts

$$\mathfrak{k} - \mathfrak{V}\mathfrak{a}\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{L}$$

so ist leicht zu erkennen, daß $\mathfrak{k}$ in der durch die Vektoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{k}$ bestimmten Ebene aufsteht, die und in dieser Ebene senkrecht zur Projektionsaxe $\mathfrak{a}$ auf dieselbe steht, dann der Vektor $\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ steht senkrecht zur Ebene $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{k}$ steht senkrecht zu diesem Vektor, liegt also in $\mathfrak{L}\mathfrak{L}$.

Setzt man die Vektorprodukte nach Gl. (18.) auf, so erhält man

$$\mathfrak{V}\mathfrak{a}\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{L} = i\{A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\}$$
$$+ j\{\ldots\ldots\} + k\{\ldots\ldots\}$$

Der Klammerausdruck, der zu j gehört, ergibt sich mit dem zum i gehörigen, indem man jeden Index, um 1 hoch resp. 2 erhöht, wobei an Übergang von 3 zu 1 als eine Erhöhung um 1 angesehen wird. Der zu i gehörige Klammerausdruck lässt sich aber, wie leicht ersehen $B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$ und ähnlich bei den anderen Gliedern. Mit Rücksicht auf Gl. 10. erhält man daher:

$$\mathfrak{V}\mathfrak{a}\mathfrak{V}\mathfrak{L}\mathfrak{L} = i(B_1 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{L} - C_1 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{L}) + j(B_2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{L} - C_2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{L}) + k(B_3 \mathfrak{a}\mathfrak{L} - C_3 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{L})$$

oder nach Auflösung der Klammern und Zusammenfassung der mit gleichen Faktoren $A\delta$ bzw. $A\delta$ versehenen Glieder

$$\nabla A \nabla \delta - \delta . A \delta - \delta . A \delta \qquad (21.)$$

damit ist der Satz bewiesen, daß ein Produkt dritter Art aus der im Eingang dieses Abschnittes aufgestellten (Seite XVIII) aus zwei Produkten erster Art und 2' gewinnbringend worden kann. Mit Hilfe dieses Satzes setzt man nun:

$$\nabla A \nabla \delta + \nabla \delta \nabla A + \nabla \delta \nabla A = 0 \qquad (22.)$$

indem man jeden der drei Glieder nach (21) entwickelt. Schließlich betrachten wir noch das skalare Produkt aus zwei Vektorprodukten

$$\nabla A \delta . \nabla \delta \delta$$

dieses ist aus der Form $E - A \nabla \delta$ (Seite XVIII) verbindet der Vektor A fällt durch ein Vektorprodukt ersetzt ist.

Unter Anwendung der in Gl (19) angegebenen Umformung erhält man:

$$\nabla A \delta \nabla \delta \delta - \delta \nabla \delta \nabla A \delta$$

der zweite Faktor dieses skalaren Produktes läßt sich nach Gl (21) weiter umformen, so daß man für das ganze Produkt erhält $\delta (A . \delta \delta - \delta . A \delta)$ oder nach Auflösung der Klammern

$$\nabla A \delta . \nabla \delta \delta - A \delta . \delta \delta - \delta \delta . A \delta \qquad (23.)$$

Differentiation der Vectoren.

Vectoren, welche in der Weise von skalaren Größen abhängig sind, daß sie bei stetiger Änderung der letzteren selbst stetig ändern, können nach diesen differenziirt werden.

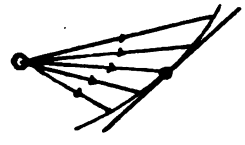
(In den Anwendungen der Vectorenrechnung auf die Mechanik ist diese skalare Größe immer die Zeit.) Entsprechend stellt sich der differentialquotient einer Function $f(x)$ der Variablen x als

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Ist der variable Vector $= A$ und der Skalar $= x$ so ist

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(A + dA) - A}{dx}$$

die Größe $\frac{dA}{dx}$ ist wieder ein Vector dessen Richtung die von dA ist (Tangentenrichtung an die Curve, die der Endpunkt des veränderlichen Vectors A beschreibt, wenn derselbe von einem Fixpunkt aus abgetragen wird), und dessen Länge gleich dem von dA multiplicirt mit dem Skalar $\frac{1}{dx}$ ist.



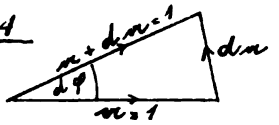
Ergänzung zu $A = aA$ (1)

a einen Vector von der Länge 1 und A den Tensor, so ist

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}(aA) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{(a+\Delta a)(A+\Delta A) - aA}{\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{A\Delta a + a\Delta A + \Delta a \cdot \Delta A}{\Delta x} = \frac{A\,da + a\,dA}{dx}$$

$$\frac{dR}{dx} = A\frac{da}{dx} + a\frac{dA}{dx}$$



Der erste Glied ist, wie auch nebenstehender Tensor zeigt, parallel zu A gerichtet (zugleich gibt der Tensor an, daß die Richtungsänderung $d\varphi$ / der a-Glied ist in der Richtung von A und gibt durch seinen Tensor die Veränderung des Tensors A an.

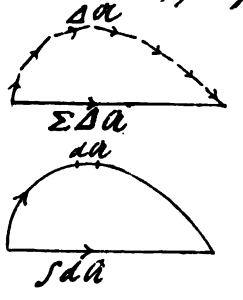
Durch analoge Grenzübergänge findet man für die Differentialquotienten der Produkte

$$a\mathfrak{L} \text{ und } V\mathfrak{A}\mathfrak{L}: \frac{d}{dx}(a\mathfrak{L}) = A\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \mathfrak{L}\frac{da}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(V\mathfrak{A}\mathfrak{L}) = V\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + V\frac{d\mathfrak{A}}{dx}\cdot\mathfrak{L} = V\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{L}}{dx} - V\mathfrak{L}\frac{d\mathfrak{A}}{dx}$$

Integration.

Das Integral im Allgemeinen ist der Grenzwert einer Summe von sehr vielen, sehr kleinen Größen. Sind diese Größen Vektoren, so ist die Summe eine gerade Linie und also falsch die Definition eines Polygons, das in der Grenze in eine Curve stetig übergeht.



Technische Mechanik.

Teil I.

Begriff der Mechanik. (Lorth §1 etc.)

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung und deren Ursachen. Sie lehrt einerseits die näheren Umstände kennen, die eine Bewegung kennzeichnen, andrerseits untersucht sie die Ursachen der Bewegungen, die Kräfte und zeigt, wie sich die Bewegungen vorgeben bei bekannten Kräften. Das Problem der Bewegungen an und für sich, gehört einer rein mathematischen Wissenschaft der Phoronomie oder Kinematik an. Das Zusammenwirken der Kräfte selbst erfolgt in der Physik, welche auf Grund der Erfahrungstatsachen die Theorie der Kräfte oder Kinetik aufstellt.

Die eigentliche Mechanik hat die Aufgabe, bei gegebenen Kräften die Bewegungen zu bestimmen und zerfällt in die

Statik: Erforschung von Zuständen, bei welchen die Kräfte keine Wirkung äußern (Gleichgewicht) und in

die Dynamik: Erforschung von Zuständen, in welchen die Kräfte Wirkungen äußern

d. h. Ermittlung der Bewegungen selbst.

Die Anwendung der Mechanik auf das Gebiet der Technik ist Sache der sog. Ingenieur- od. Maschinenmechanik (: oder was gemeint: Technische Mechanik, Angewandte Mechanik etc.)

Anmerkung:

Mathematisch gesprochen führt die Aufgabe der Kräfte auf das Gebiet der Differentialrechnung, die Erforschung der Bewegungen hingegen bei bekannten Kräften auf die der Integralrechnung. —.

Um ihren Aufgaben gerecht zu werden, benutzt die Mechanik, gemäß einer möglichst einfachen und möglichst umfassenden Darstellung der in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen, Bilder derselben aus der Körperwelt ab und von den zwischen ihnen bestehenden Beziehungen. Von diesen Bildern ist nur zu verlangen, daß sie 1.) begrifflich zulässig und 2.) richtig sind, d. h. daß die für die Bilder gezogenen Schlüsse mit den naturwirklichen Folgen übereinstimmen, endlich daß sie zweckmäßig sind, d. h. bei mehreren zugleich möglichen Darstellungen ist der einfachsten und zugleich umfassendsten Vorzug zu geben.

Mechanik des materiellen Punktes.

Ist die Bewegung eines Körpers bekannt, d.h. alle Punkte kongruenter Lagen bekannt (Translationsbewegung), so genügt es, einen einzelnen Punkt herauszugreifen und dessen Bewegungsverhältnisse zu betrachten. Ist dann die Bewegung dieses einen Punktes bekannt, so kennt man sofort auch die aller anderen. Man nennt dann diesen Punkt als Repräsentant des ganzen Körpers (als Bild des Körpers) auffassen und nennt ihn also selben den materiellen Punkt. Kann jedoch nicht alle Punkte kongruente Lagen beschreiben (wenn der Körper auch Rotationsbewegungen ausführt) so ist dieses Bild nicht mehr so ohne weiteres zulässig.

Den Ausgangspunkt für die Mechanik der materiellen Punkte bildet das

Trägheitsgesetz: Ein allen äußeren Einflüssen entzogener materieller Punkt behält seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung unverändert bei.

(Spezieller Fall: War er in Ruhe so bleibt er in Ruhe.)

Man nennt diesen Zustand Bewegungszustand.

d. h. Ermittlung der Bewegungen selbst.

Die Anwendung der Mechanik auf das Gebiet der Technik ist Inhalt der sog. Ingenieur- od. Maschinenmechanik (: oder auch genannt: Technische Mechanik, Angewandte Mechanik etc.)

Anmerkung:

Mathematisch gesprochen führt die Aufgabe der Kräfte auf das Gebiet der Differentialrechnung, die Erforschung der Bewegungen gegeben bei bekannten Kräften auf das der Integralrechnung.—.

Um ihren Aufgaben gerecht zu werden, benutzt die Mechanik, gemäß einer möglichst einfachen und möglichst umfassenden Darstellung der in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen, Bilder sowohl aus der Körperwelt als auch aus den geistigen bestehenden Beziehungen. Von diesen Bildern ist nur zu verlangen, daß sie 1.) logisch zulässig und 2.) richtig sind, d. h. daß die für die Bilder gezogenen Schlüsse mit den naturwirklichen Folgen übereinstimmen, endlich daß sie zweckmäßig sind, d. h. bei mehreren gleich möglichen Darstellungen ist der einfachsten und gleich umfassendsten der Vorzug zu geben.

Mechanik des materiellen Punktes.

Ist die Bewegung eines Körpers bekannt, daß alle Punkte kongruente Bahnen beschreiben (Translationsbewegung), so genügt es, einen einzelnen Punkt herauszugreifen und dessen Bewegungsverhältnisse zu betrachten. Ist dann die Bewegung dieses einen Punktes bekannt, so kennt man sofort auch die aller andern. Man kann daher diesen Punkt als Repräsentant des ganzen Körpers (als Bild des Körpers) auffassen und nennt ihn also schon den materiellen Punkt. Kann jedoch nicht alle Punkte kongruente Bahnen beschreiben (wenn der Körper auch Rotationsbewegungen ausführt) so ist dieses Bild nicht mehr ohne weiteres zulässig.

Den Ausgangspunkt für die Mechanik des materiellen Punktes bildet das

Trägheitsgesetz: Ein allein äußeren Einflüssen entzogener materieller Punkt behält seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung unverändert bei.

(Spezieller Fall: War er in Ruhe so bleibt er in Ruhe.)

Man nennt diesen stetigen Bewegungszustand.

Einflüsse, welche eine Abweichung von diesen Postulaten hervorrufen, werden Kräfte genannt.

Anmerkung: In der Mechanik wird mit Vorteil die Rechnung mit Vektoren in Anwendung gebracht. Es soll nun im folgenden vor allem zugleich mit einer Definition der in der Mechanik vorkommenden Größen gezeigt werden, wie sich diese durch Vektoren ausdrücken lassen.

Unter dem Weg eines beliebigen materiellen Punktes wird in den Rechnungen der Mechanik die augenblickliche Entfernung des materiellen Punktes von einem Anfangspunkt (Pol, Koordinatenursprung) verstanden; in der Vektorrechnung ist als Weg (zeichnerisch mit s bezeichnet) diejenige Strecke nach Größe und Richtung zu nehmen, welche die augenblickliche Lage des materiellen Punktes mit dem Ursprung verbindet und zwar mit dem Pfeil vom Ursprung nach dem materiellen Punkte hin.

Eine Geschwindigkeit im allgemeinen ist definiert durch die Proportion

(Geschwindigkeit) : (Zeiteinheit) =
= (Weg im Zeitelement) : (Zeitelement)

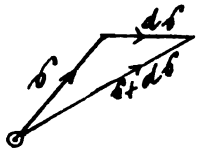
Speziell für den Bewegungszustand ist die Geschwindigkeit gleich dem Weg in der Zeiteinheit (Stunde).

der die Geschwindigkeit darstellende Vektor (v) besitzt die Richtung der Tangente an die Bahnkurve und den Sinn, in welchem der materielle Punkt die Bahnkurve durchläuft; die absolute Größe (der Betrag) ergibt sich aus der Definitionsgleichung, die in Worten gesprochen lautet:

$$v : 1(\text{sec.}) = ds : dt$$

$$\text{oder } \underline{ds = v\,dt}$$

$$\text{und } v = \underline{\frac{ds}{dt}}$$

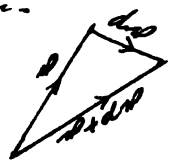


(1.)

Für den Beschleunigungszustand ist

$v = c$ und $\frac{dv}{dt} = 0$ (Geschwindigkeit) nach Größe und Richtung konstant.

Die Größe dv gibt nach Größe und Richtung die Veränderung der Geschwindigkeit in einem Zeitelement an.



Auf die Zeiteinheit bezogen definiert $\frac{dv}{dt}$ den Begriff der Beschleunigung, (gewöhnlich mit b bezeichnet.) Ist also nach $\frac{dv}{dt} = b$, und ferner, da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist nun

$$b = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (2)$$

Das Maß für die Trägheit einer Körper

Einflüsse, welche eine Abweichung von diesem Verhalten hervorrufen, werden Kräfte genannt.

Anmerkung: In der Mechanik wird mit Vorteil die Rechnung mit Vektoren in Anwendung gebracht. Es soll nun im folgenden vor allem zugleich mit einer Definition der in der Mechanik vorkommenden Größen gezeigt werden, wie sich diese durch Vektoren ausdrücken lassen.

Unter dem Weg eines beliebigen materiellen Punktes wird in den Rechnungen der Mechanik die augenblickliche Entfernung des materiellen Punktes von einem Anfangspunkt (Pol, Koordinatenursprung) verstanden; in der Vektorenrechnung ist als Weg (gewöhnlich mit s bezeichnet) diejenige Strecke nach Größe und Richtung zu nehmen, welche die augenblickliche Lage des materiellen Punktes mit dem Ursprung verbindet und zwar mit dem Pfeil vom Ursprung nach dem materiellen Punkte hin.

Eine Geschwindigkeit im allgemeinen ist definiert durch die Proportion

(Geschwindigkeit) : (Zeiteinheit) =
= (Weg im Zeitelement) : (Zeitelement)

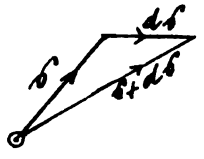
Speziell für den Bewegungszustand ist die Geschwindigkeit gleich dem Weg in der Zeiteinheit (Stunde).

der die Geschwindigkeit darstellende Vektor (v) besitzt die Richtung der Tangente an die Leitkurve und den Sinn, in welchem der materielle Punkt die Leitkurve durchläuft, die absolute Größe (der Betrag) ergibt sich aus der Proportion, die in Worten gesprochen lautet:

$$v : 1(\text{sec.}) = ds : dt$$

$$\text{oder } \underline{ds = v\,dt}$$

$$\text{und } v = \underline{\frac{ds}{dt}} \qquad (1.)$$

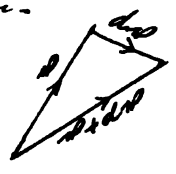


Für den Beschleunigungszustand ist

$v = c$ und $\frac{dv}{dt} = 0$ (Geschwindigkeit) nach Größe und Richtung konstant.

Die Größe dv gibt nach Größe und Richtung die Veränderung der Geschwindigkeit in einem Zeitelement an.

Auf die Zeiteinheit bezogen definiert $\frac{dv}{dt}$ den Begriff der Beschleunigung, (gewöhnlich mit b bezeichnet.) Es ist demnach $\frac{dv}{dt} = b$, und ferner, da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, hat man $b = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ (2)



Das Maß für die Trägheit eines Körpers

bildet die Masse. Diese ist eine skalare Größe (besitzt keine Richtung) und ist für einen und denselben Körper eine Konstante.

Die Erfahrung besagt, daß ein und derselben Masse verschiedene Kräfte ihnen proportionale Beschleunigungen erteilen und daß, um die selbe Beschleunigung verschiedenen Massen zu erteilen, diesen proportionale Kräfte erforderlich sind. Setzt, da die Beschleunigung immer in die Richtung der Kraft fällt, so die Gleichung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

$$\text{in Zeichen } \mathfrak{P} = m\mathfrak{b} \qquad (3a)$$

diese Gleichung heißt dynamische Grundgleichung, da sich aus ihr alle Grundsätze der Mechanik ableiten lassen. – Setzt man für $\mathfrak{b}$ seinen Wert aus Gleichung (2), so erhält man noch folgende Formen für die dynamische Grundgleichung

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P}, \text{ und} \qquad (3b)$$

$$m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \mathfrak{P} \qquad (3c)$$

Setzt man den Begriff der Masse als bekannt voraus, so ist durch die dynamische Grundgleichung die Kraft definiert (als diejenige Ursache, durch die der Masse m die Beschleunigung $\mathfrak{b}$

erfüllt wird); setzt man dagegen den Begriff der Kraft voraus, so definiert die Gleichung die Masse.

Der Impulssatz ist in der dynamischen Grundgleichung mitenthalten, denn setzt man $\mathfrak{P} = 0$, so wird auch $\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = 0$ und $\mathfrak{v}$ konstant.

Durch Umformung der dynamischen Grundgleichung erhält man noch folgende zwei wichtige Beziehungen.

1.) Multipliziert man die dynam. Grundgleichung mit dt, so erhält man $\mathfrak{P} dt = m d\mathfrak{v} = d(m\mathfrak{v})$ woraus sich durch Integration ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P} dt = m\mathfrak{v}_2 - m\mathfrak{v}_1 \qquad (4)$$

das Produkt $m\mathfrak{v}$ heißt Bewegungsgröße, $\int \mathfrak{P} dt$ wird Antrieb oder Impuls der Kraft genannt. Diese Gleichung findet hauptsächlich bei Behandlung der Reflexionserscheinungen Verwendung.

2.) Für $\mathfrak{v} = \frac{ds}{dt}$ und $d\mathfrak{v} = b\,dt$ erhält man durch Multiplikation

$\mathfrak{v} d\mathfrak{v} = \frac{b\,ds\,dt}{dt}$, hieraus $m\mathfrak{v} d\mathfrak{v} = m b\,ds$ und da $\mathfrak{v} d\mathfrak{v} = d\left(\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\right)$ und $mb = \mathfrak{P}$ ist,

$d\left(\frac{m\mathfrak{v}^2}{2}\right) = \mathfrak{P} ds$, und durch Integration

$$\frac{m(\mathfrak{v}_2^2 - \mathfrak{v}_1^2)}{2} = \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{P} ds \qquad (5)$$

Das Produkt $\frac{mv^2}{2}$ wird lebendige Kraft oder Lenagungsenergie genannt, das Produkt $Pds\cos\alpha$ dagegen Arbeit der Kraft oder mechanische Arbeit. Der durch die letzte Gleichung ausgesprochene Satz von der lebendigen Kraft heißt also: „die Änderung der lebendigen Kraft ist gleich der von der Kraft geleisteten Arbeit". — Arbeit und lebendige Kraft sind skalare Größen, Lenagungsgröße und Antrieb dagegen besitzen eine Richtung.

In allen bisher besprochenen Fällen mußten stets gewisse Annahmen, Vereinfachungen und Verallgemeinerungen auf den absoluten Raum (den Äthersystem) bezogen werden. Der Fehler wird aber entstehen, wenn nun die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen relativ zur Erde statt der absoluten in die Rechnung einsetzt, ist indessen für die Anwendungen der Technik von irgend einem merklichen Einfluß. Hierbei ganz vereinzelten Problemen (Foucaultscher Pendel, Ablenkung fallender Körper nach Osten) muß es berücksichtigt werden.

Geradlinige Bewegung.

Es sei nur zwei Richtungen vorkommen, die sich allein durch das Zeichen unterscheiden, dann die ganze Rechnung eine vorzeichenmäßige mit dem Einheitsfaktor der betreffenden Richtung divisiert werden und dann in absoluten Größen gerechnet werden.

I. Die gleichförmige Bewegung ist bereits behandelt worden, hier ist

$$P = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad s = vt$$

II. Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Beim freien Fall im luftleeren Raum ist erfahrungsgemäß $s = \frac{gt^2}{2}$. Hieraus folgt $v = \frac{ds}{dt} = gt$, $b = \frac{dv}{dt} = g$

g (gravitatio) heißt Erdbeschleunigung und ist für einen und denselben Ort eine Konstante (in unseren Gegenden ein Mittel 9,81 m in der Sekunde).

Allgemein ist für die gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$b = \text{const.};$$

hieraus

Zweites Beispiel: Fallbewegung mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Nach Newton ist der Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit (trifft nicht genau zu).

$m\frac{dv}{dt} = Q - cv^2$ oder $\frac{dv}{dt} = g - c'v^2$, wenn wieder $c' = \frac{c}{m}$ ist, $dt = \frac{dv}{g - c'v^2}$ und

$$t = \int \frac{dv}{g - cv^2} + C;$$ hieraus:

$$t = C + \frac{1}{2\sqrt{gc'}} \lg \frac{\sqrt{gc'} + c'v}{\sqrt{gc'} - c'v};$$ da $v = 0$ für $t = 0$, muß $C = 0$ sein. Nach v aufgelöst ergibt die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{g}{c'}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{gc'}} - 1}{e^{2t\sqrt{gc'}} + 1}$$

Durch nochmalige Integration findet man den Weg:

$$s = \frac{1}{c'} \lg \frac{e^{t\sqrt{gc'}} + e^{-t\sqrt{gc'}}}{2}$$

Zusammensetzung von Bewegungen.

Beobachtet man die Bewegung eines Punktes bei einem Raume, dessen einzelne Punkte selbst bewegliche Lagen beschreiben, so sagt man, wenn s den Weg des Punktes im absoluten Raum, s_1 den Weg der Punkte des beobachteten Raumes gegenüber dem absol. Raum

und δ_2 den Weg des Punktes auf den bewegten Raum bezogen (relativer Weg) bedeutet,

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

(Über den Weg als gerichtete Größe siehe Seite 4).

Da die Größen δ, δ_1 und δ_2 mit der Zeit sich stetig ändern, kann Gleichung (7) auch nach der Zeit differenziert werden:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt} \quad \text{oder} \quad v = v_1 + v_2, \quad (8)$$

ebenso $\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\delta_1}{dt^2} + \frac{d^2\delta_2}{dt^2}$ oder $b = b_1 + b_2$, d.h. (9)

die absolute Beschleunigkeit (resp. Beschleunigung) ist gleich der geometrischen Summe aus der relativen Beschleunigkeit (Beschl.) und der Führungsbeschleunigkeit (Beschl.) des Raumes.

Auf Grund dieser Betrachtungen hat man sich die Vorstellung gebildet, daß ein materieller Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen ausführen kann, die unabhängig voneinander erfolgen. (Prinzip der Unabhängigkeit).

Multipliziert man Gl. (9) mit m, so erhält man

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2} = m\frac{d^2\delta_1}{dt^2} + m\frac{d^2\delta_2}{dt^2} \text{ oder } \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \quad (10)$$

d. h. zwei Kräfte, die gleichzeitig an einem Punkt angreifen, können in ihrer Wirkung durch eine einzige, die Resultante, ersetzt werden, welche die gemeinschaftliche Summe der beiden ist. (Satz vom Parallelogramm der Kräfte.) Man kann für diese Deutung der Lage nützlich von der obigen Darstellung, wenn man annimmt, $\mathfrak{P}_1$ wirke nicht nur auf den materiellen Punkt, sondern auf den starren bewegten Raum, so daß die relative Bewegung des materiellen Punktes nur noch von $\mathfrak{P}_2$ verursacht wird.

Der Satz von der gemeinschaftlichen Summierung der Kräfte läßt sich sofort auf mehrere Kräfte anwenden und es ist dann:

$$\mathfrak{R} = \underline{\Sigma(\mathfrak{P})} \quad (11)$$

Faßt man nämlich die ersten zwei Kräfte zu einer Resultierenden $\mathfrak{R}'$ zusammen, vereinigt dann $\mathfrak{R}'$ mit einer weiteren Kraft zu $\mathfrak{R}''$ u. s. w., so ist bei n Kräften

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_n + \mathfrak{R}^{(n-2)}; \quad \mathfrak{R}^{(n-2)} = \mathfrak{P}_{n-1} + \mathfrak{R}^{(n-3)}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \mathfrak{R}'' = \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{R}' \text{ und } \mathfrak{R}' = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1 ;$$

sinnvoll:

$$R = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \ldots\ldots + \mathfrak{P}_n = \Sigma \mathfrak{P}.$$

Für den Fall, daß sich die Kräfte gleichgewichtig halten, geht Gleichung 11 über in

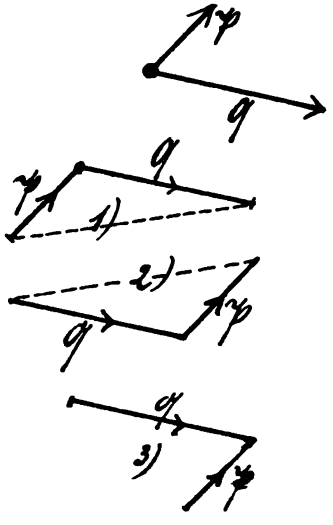
$$\Sigma \mathfrak{P} = 0 \qquad (12)$$

Kräftedreieck. Kräftepolygon.

Der Satz von der geometrischen Summierung der Kräfte führt zu der graphischen Lösung zahlreicher Probleme der Mechanik:

Die Kräfte werden unter Zugrundelegung eines Kräftemaßstabes (z. B. 1 kg = 5 mm), durch ihre Richtung gewollte Strecken dargestellt.

Zwei Kräfte die zu einer Resultierenden vereinigt werden sollen, reiht man so aneinander, daß ihre Pfeile in selben Sinn gehen. Die Reihenfolge ist dabei gleichgültig; die gezeichneten Kräftestrecken stehen daher in 1) und 2) richtig, in 3) aber falsch aneinander gereiht.



Die dritte Seite des Dreiecks ergibt sich auf dem Pfeil rückwärts.

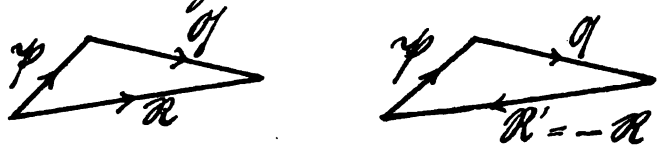
der die Resultirende der beiden Kräfte

$$(R = P + Q),$$

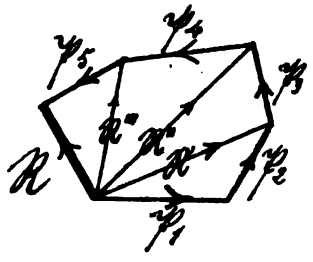
oder die Kraft, welche den ersteren Kräften Gleichgewicht hält

$$(P + Q + R' = 0),$$

erstere wenn man in dem Pfeil folgend vom Anfangspunkt der ersten Kraft zum Endpunkt der zweiten gelangt, letztere wenn die drei Pfeile einen gleichsinnigen Umlaufsinn angeben.



Bei mehreren Kräften könnte man wie auf Seite 14 die Resultirenden $R', R'' \ldots R^{(n-2)}$ bilden, wenn in der Figur nur die Diagonalen übrig gelassen werden und damit erhält man als Erweiterung des Kräftedreiecks das Kräftepolygon. Um also ein Kräftepolygon zu erhalten, fügt man alle Kräfte in beliebiger Reihenfolge aneinander, dass die Pfeile einerlei Sinn angeben. Die



Resultirende ist dann die Resultirende aus der zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft.

Die Kräfte eines Gleichgewichtssystems müssen also gleichförmig aufeinandergereiht einen nur ein geschlossenes Polygon ergeben, was auch durch die Gleichung $\Sigma X = 0$ ausgesprochen ist, welche besagt, dass die Projektion $= 0$ sein muss.

Anmerkung: Wie man mehrere Kräfte zu einer Resultirenden vereinigen kann, ebenso kann man eine Kraft in Teilkräfte, „Komponenten" zerlegen, deren Resultirende sie ist. Von derartiger Zerlegung wird späterhin vielfach Gebrauch gemacht werden.

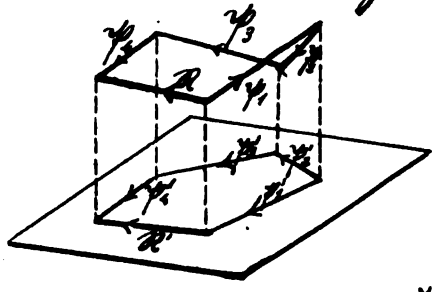
Projectionssatz.

Wenn die Projektionen von gleichen Kräften auf eine Ebene oder Gerade einander gleich sind und gewisse aufeinandergereihte Kräfte denen auf einander gereihte Projektionen ergeben, so folgt durch Projektion eines geschlossenen Polygons $R - \Sigma P$ resp. $\Sigma X = 0$, wenn R u. X Projektionen von R u. P bezeichnen, dass auch

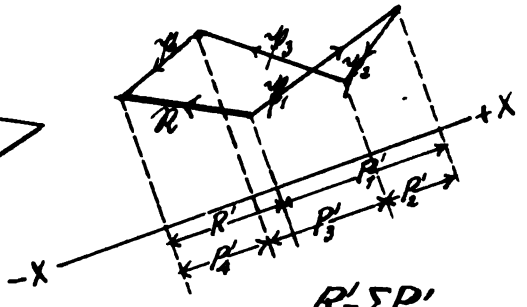
$$R' = \Sigma Y' \quad \text{resp.} \quad \Sigma Y' = 0, \qquad (1)$$

d. h. „die Projektion der Resultierenden ist Resultierende der Projektionen der Kräfte" resp.

„die Projektion eines Gleichgewichtssystems ist wieder ein Gleichgewichtssystem. Die Projektionen auf eine Gerade gibt die graphische Summe in eine algebraische über.



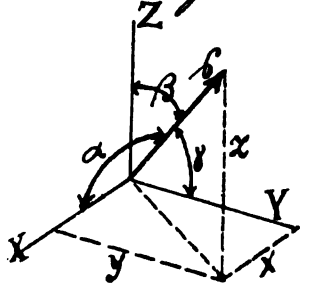
$R' = \Sigma Y'$



$R' = \Sigma P'$

Durch Projektion auf drei zu einander senkrechte Achsen erhält man den Übergang zu der Methode der analytischen Mechanik, mit den Koordinaten, x, y, z zu rechnen.

Wie die Kräfte so kann man auch den Weg s durch Projektion auf ein rechtwinkliges Achsensystem in drei Komponenten, x y und z spalten. Nennt man α, β und γ die Winkel zwischen s und den Achsen, so erhält man die Gleichungen:



$$x = \sigma i = s\cos\alpha$$
$$y = \sigma j = s\cos\beta \text{ und}$$
$$z = \sigma k = s\cos\gamma, \text{ wobei } s = [\sigma]$$

den Absolutwert (Tensor) von σ bedeutet.

$$x^2+y^2+z^2 = s^2;$$

ebenso wird $s = \frac{d\sigma}{dt}$ in drei Komponenten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ und } \frac{dz}{dt} \text{ zerfallen;}$$

und

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ wird}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2z}{dt^2}.$$ die skalare Grundgleichung $\frac{m\,d^2\sigma}{dt^2} = \Sigma\mathfrak{P}$ löst sich also in drei Gleichungen auf:

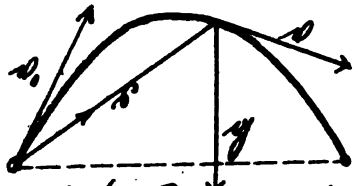
$$\frac{m\,d^2x}{dt^2} = X, \frac{m\,d^2y}{dt^2} = Y \text{ und } \frac{m\,d^2z}{dt^2} = Z \quad (14)$$

wobei X, Y und Z die Komponenten von $\Sigma\mathfrak{P}$ nach den drei Achsenrichtungen bedeuten. Diese drei Gleichungen heißen die <u>Lagrangeschen Bewegungsgleichungen</u> und werden bei der analytischen Behandlung der Probleme angewandt. Durch sie ist der Satz ausgesprochen: „die Projektionen der Punktbewegung auf den drei Achsenrichtungen bewegen sich so, als

als ob an ihnen die Projektionen der Kräfte angebracht wären."

Beispiel. Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes).

a) in Vektoranschreibung



$\frac{dv}{dt} = g$; $v = \frac{ds}{dt} = v_0 + gt$;

$s = s_0 + v_0 t + g\frac{t^2}{2}$ (15a)

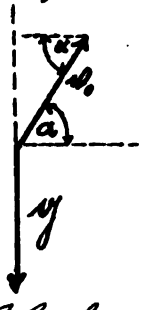
(s_0 kann durch Verlegung des Ursprungs in den Anfangspunkt der Bewegung für 0 gesetzt werden.)

Für den höchsten Punkt der Bahn ist v horizontal, also $v_g = 0 = v_0 g + g^2 t_1$; hieraus $t_1 = -\frac{v_0 g}{g^2}$. Wird s horizontal, so ist $s_g = 0$; $v_0 g t_2 + g^2 \frac{t_2^2}{2}$; hieraus

$$t_2 = \frac{2 v_0 g}{g^2} = 2 t_1$$

$$= -\frac{v_0 g}{g^2} = -\frac{v_0 g \cos(v g)}{g^2} =$$

$$= \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$



b) Methode der <u>analytischen Mechanik</u>.

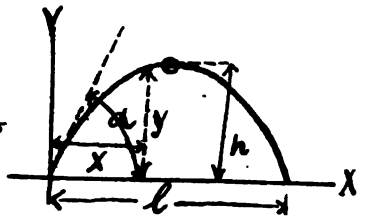
Da der Vorgang sich in einer Ebene abspielt, kommt man hier mit zwei Koor-

Richtungen x und y wie.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad y = v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}$$



Für den höchsten Punkt ist $\frac{dy}{dt} = 0 = v_0 \sin\alpha - gt_1$ und $t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$; $h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

Für $x = l$ (Wurfweite) ist

$$y = 0 = v_0 t_2 \sin\alpha - g\frac{t_2^2}{2} \text{ und}$$

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha;\ l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (15)$$

Bei konstantem v_0 wird die Wurfweite für einen Maximum $= \frac{v_0^2}{2g}$ für

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Centripetal- und Tangentialbeschleunigung.

Beschleunigung ist allgemein jede Geschwindigkeitsänderung nach Größe und Richtung, auch die gleichmäßig beschleunigte Bewegung in Richtung der Bahnkurve verändert die Geschwindigkeit nur der Größe nach und heißt, da sie tangential an die Bahnkurve ist, Tangentialbeschleunigung; eine Richtungsänderung ohne Größenänderung dagegen wird durch eine Beschleunigung hervorgerufen,

die normal zur Bahnkurve in der Schmiegungsebene derselben wirkt; diese heißt die Normalbeschleunigung (centrum petere). Jede Beschleunigung kann in diese zwei rechtwinklig auf einander stehenden Komponenten zerlegt werden. Für diesen Zweck setze man in der dynamischen Grundgleichung

$$p = m\frac{dv}{dt} \qquad v = v_1 . v,$$

wobei v der Absolutwert von v (Tempo) und v_1 der in der Richtung von v gegangene Einheitsvektor ist, aber mit anderm Maßstab: v_1 hat die Richtung von v_1, aber den Absolutwert 1, v ist eine Zahlengröße und gibt an, wieviel v_1 in v enthalten ist, also

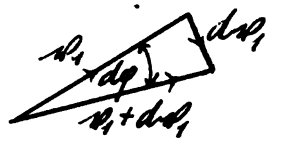
$$v_1 = \frac{v}{v} \text{ und } v = \frac{v}{v_1}.$$

$v = v_1 v$ differenziert liefert:

$$dv = v_1 dv + v dv_1;$$

$v_1 dv$ bedeutet eine Änderung der absoluten Größe von v_1 und fällt in die Richtung von v_1, also in die Richtung der Bahntangente; $v dv_1$ stellt eine Richtungsänderung dar, denn $[v_1]$ ist wegen der Konstante = 1 und ändert nur seine Richtung.

Außerdem ist $d w_1$ parallel
zu w_1 (der Kreisbogen ist fast
parallel zum Radius) der
Absolutwert von $d w_1$ ist:



$$[dw_1] = [w_1]\,d\varphi = d\varphi.$$

Mit Berücksichtigung dieser Formulierung wird
nun $\mathfrak{P} = m\frac{dw}{dt}$:

$$\mathfrak{P} = m w_1 \frac{dv}{dt} + m v \frac{dw}{dt} \qquad (16.)$$

Der erste Summand stellt die Tangentialbeschleunigung, der zweite die Normalbeschleunigung der Kraft dar.

Die Richtung der Schleuderkraft durch den Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve. Ihren Absolutbetrag nach betrachtet, ist die Normalkraft

$$C = m v \frac{d\varphi}{dt};$$

da

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho} \qquad \begin{matrix}(ds\ \text{Bogenelement},\\ \varrho\ \text{Krümmungsradius})\end{matrix}$$

$$C = m v \frac{ds}{dt\varrho} = \frac{m v^2}{\varrho} = \frac{Q}{g}\cdot\frac{v^2}{\varrho} \qquad (17.)$$

denn $\frac{ds}{dt} = v$ und $m = \frac{Q}{g}$

Zum Festhaltekommen einer gleichförmigen Rotation ist eine Kraft

$$C = \frac{m v^2}{\varrho}$$

in der Richtung des Radius nach innen, diese Kraft heißt Centripetalkraft, die Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ Centripetalbeschleunigung.

Ein in gleichförmiger Rotation befindliches System kann untersucht werden, wenn es in Ruhe wäre, dann muß man in jedem materiellen Punkt desselben eine fingierte Kraft hinzufügen, die der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist. Diese fingierte Kraft, die sogenannte Centrifugalkraft berechnet sich dann also nach Gleichung (17).

Wird ein materieller Punkt gezwungenermaßen auf einer Kreisbahn gehalten, so tritt die Centrifugalkraft als Reaktion der Zwangskräfte auf, welche die Centripetalkraft aufbringen.

Definition: Unter der Winkelgeschwindigkeit (14) eines rotierenden Körpers versteht man die Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers, der den Abstand 1 von der Achse hat. Die Umfangsgeschwindigkeit v ist dann $v = \omega r$ (r: Radius, Abstand von der Achse.) die Formel für die Centrifugalkraft:

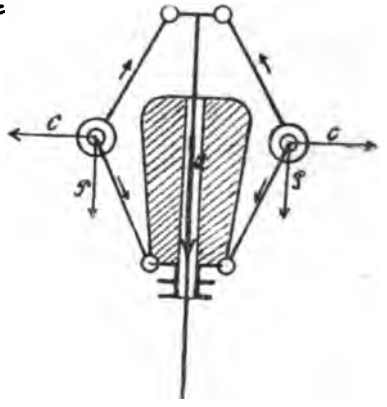
$$C = \frac{m v^2}{r}$$

läßt sich auch schreiben

$$C = m \omega^2 r$$

Anwendungen:

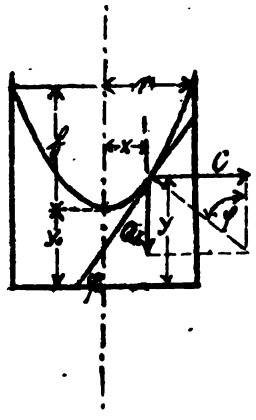
1.) Der Fliehkraftregulator von Porter (Föppl, E. M. II g). Auf der Regulatorspindel verschiebbare Gegengewichte drücken die beiden Kugeln nach der Mitte hin zu ziehen.



An jeder Kugel faßt sich der Gewicht mit den Zugkräften in den Armen zu einer Mittelkraft zusammen, welche die Zentrifugalkraft aufhebt. Die gesuchte Zentrifugalkraft muß mit der stetig auf die Kugel wirken, den Kräften im Gleichgewicht stehen.

2.) Ein zylindrisches Gefäß, das mit Flüssigkeit gefüllt ist, rotiere um die Zylinderachse. Wie sieht eine Fläche wird vom Flüssigkeitsspiegel gebildet und wie tief ist die Einsenkung?

Die Flüssigkeitsoberfläche steht in jedem Punkt senkrecht zur Richtung



der resultierenden Kraft.
Winkelgeschwindigkeit
= ω
Für die Gewichtseinheit der Flüssigkeit ist die Schwerkraft
Q = 1,
die Centrifugalkraft
$C = \frac{1}{g} \omega^2 x$;
nun ist $tg\varphi = \frac{C}{Q} = \frac{\omega^2 x}{g}$. Sind ferner x und y die Coordinaten der Meridiankurve so ist

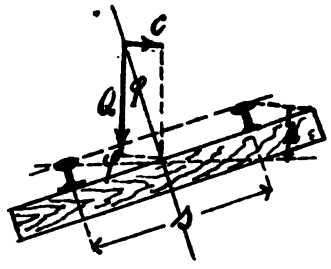
$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$ hieraus

$y = y_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$ (die Meridiankurve ist eine Parabel und die Wasseroberfläche ist ein Rotationsparaboloid.)

die Einsenkung der Wasseroberfläche:
$f = y_r - y_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$; setzt man
$\omega r = v$ (Umfangsgeschwindigkeit), so ist

$f = \frac{v^2}{2g}$, d. h. die Einsenkung ist gleich der Höhe, aus der ein Körper fallen müsste, um eine Geschwindigkeit zu erlangen, die gleich der Randgeschwindigkeit ist.

3.) Überhöhung der Eisenbahnschienen in Curven. Die Richtung der resultierenden Schwerkraft und Centrifugalkraft repräsentiren stets die Schienenebene auf die Schienen fällt die Verbindungslinie der Schienen-Contactpunkte senkrecht fallen.



Überhöhung für

$$tg\varphi = \frac{C}{Q} = \frac{v^2}{gr}$$

$\frac{h}{s} = \sin\varphi$ (Kann wegen der Kleinheit von φ mit $tg\varphi$ vertauscht werden)

$\frac{h}{s} = \frac{v^2}{gr}$ ergibt die Überhöhung

$h = \frac{s v^2}{gr}$.

Begriff der Arbeit.

An einem in Bewegung befindlichen Punkte wirke die Kraft P. Fällt die Bewegungsrichtung mit der Kraft zusammen, so definiert man das Produkt P.s (= Kraft × Weg des Angriffspunktes während der Wirkung der Kraft P) als die Arbeit der Kraft P. Bilden dagegen die beiden Richtungen einen beliebigen Winkel

mit einander, so versteht man unter der Arbeit das Product aus der Verschiebung und der Projection der Kraft auf die Wegrichtung (oder auch umgekehrt das Product aus Kraft und Projection des Weges auf die Kraftrichtung) also:

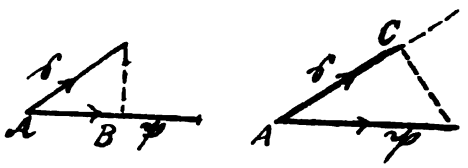
$$A = P.s.\cos(Ps)$$

Verschiebt sich demnach ein mat. Punkt A, auf dem die Kraft $\mathfrak{P}$ wirkt, um die Strecke σ, so stellt das Product

$$\mathfrak{P}.\sigma = P.s.\cos(Ps)$$

die Arbeit dar:

$$\text{Arbeit} = \mathfrak{P}.\sigma \qquad (18.)$$



$AB = s.\cos(Ps)$
$AC = P\cos(Ps)$

$\mathfrak{P}.\sigma$ ist das scalare (oder auch „innere") Product aus den Factoren $\mathfrak{P}$ und σ. Es ist eine scalare Größe und wird durch die aufgestellten Festsetzungen definirt. Die Arbeit wird positiv, Null oder negativ, je nachdem der Winkel zwischen den Richtungen $\mathfrak{P}$ und σ ein spitzer, rechter oder stumpfer ist.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ist R die Resultirende sämmtlicher Kräfte P, die an A angreifen, also $R = \Sigma P$ und nun projicirt auf einen beliebigen gedachten (s. virtuellen) Weg δs, so ist nach Gleichung (13), wenn die Projektion von P_1 mit P'_1, die von P_2 mit P'_2 u. s. f. bezeichnet wird:

$R' = \Sigma P'$ und $R' \cdot \delta s = \Sigma(P' \cdot \delta s)$, aber nach der Definition des scalaren Produktes:

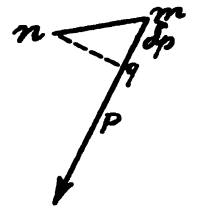
$$R \delta s = \Sigma(P \delta s) \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

d. h. die Arbeit der Resultirenden ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Komponenten. Dieser Satz spricht aus, daß eine gerichtete Größe scalar multiplicirt wird, indem man jedes Glied scalar multiplicirt. Die einzelnen Glieder geben aber hierin die Arbeitswerthe bezüglichen Kräfte an. Der Satz ist damit für jede Elementarbewegung des mat. P. bewiesen und gilt auch für jede beliebig gestaltete Bewegung, da sich diese stets in Elemente zerlegen läßt. Fallen sich die Kräfte P im Gleichgewicht, so kann trotzdem eine beliebige Bewegung des Angriffspunktes gedacht werden, wenn dabei stets eine gewisse

Gelegenheit besteht oder auf eine Bewegung, die durch eine andere, nicht unter den Begriff fallende Kraft hervorgerufen wird. Wendet man den Begriff auf diesen Fall an, so vereinfacht er sich in der folgenden Weise: „Halten sich zwei Kräfte an einem mat. Punkte, der sich in Bewegung befindet, im Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe der Arbeiten dieser Kräfte gleich Null." In dieser Form wendet man nun den Satz der Möglichkeit der virtuellen Geschwindigkeiten oder auch der virtuellen Arbeiten; derselbe kann auch in folgender Fassung ausgesprochen werden:

[: Hütte I. Theil 158.] Denkt man sich einem Systeme von beliebig verbundenen Punkten eine mit seiner Natur verträgliche unendlich kleine Veränderung ertheilt, so heißt eine solche eine virtuelle Bewegung oder Verschiebung. Man spricht sodann von virtuellen Geschwindigkeiten; insofern die jenen fingirten Bewegungszustand entsprechenden Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte nicht als wirkliche, sondern nur als gedachte, d. h. als „virtuelle" Geschwindigkeiten aufgefaßt sind. Betrachtet dabei der Punkt m [: eine beliebige Punkte

der Einwirkung der Kraft P einen unendlich kleinen Weg m n, den man als gerade Linie betrachten kann, so macht man in der virtuelle Verschiebung des Punktes m, die Projektion mq = δp die nach der Richtung von P genommene virtuelle Verrückung und das Produkt P. δp die virtuelle Arbeit von P. Man sagt nun: „Die virtuelle Arbeit einer Kraft ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten der Seitenkräfte;" und



„Wenn beliebig Kräfte sich an einem beliebigen System von Punkten des Gleichgewicht halten, so ist für jede virtuelle Verschiebung des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten der an denselben wirkenden Kräfte gleich Null," oder ausgedrückt:

„Wenn für jede virtuelle Lagerung des Systems die Summe der virtuellen Arbeiten der an denselben angreifenden Kräfte gleich Null ist, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht." Hiernach läßt sich dieser Satz durch folgende Gleichung darstellen:

$$\Sigma(P\delta p) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

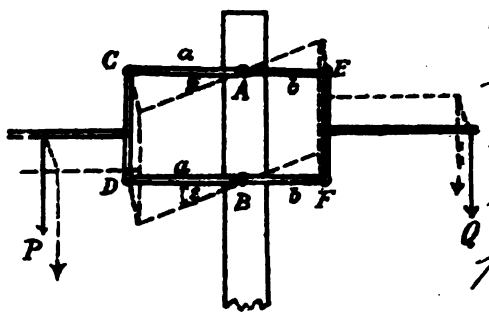
wenn δx, δy, δz die virtuellen Koordinatenänderungen

von den Angriffspunkten der Kräfte beginnen.
(Weiteres siehe R. A. M § 64. § 84.)

Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

R. A. M. 178. **Roberval'sche Waage.**

Es sind die Bedingungen des Gleichgewichts für die beiden Gewichte P und Q zu finden. Als einzig mögliche Lagenänderung des Waagebalkens ist im vorliegenden Falle eine solche Verschiebung desselben zu betrachten, bei welcher die Waagen CE und DF resp. um ihre festen horizontalen Drehachsen A und B sich drehen. Denkt man sich durch eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel ε den Waagebalken in die gestrichelte Lage übergeführt, so erkennt man, dass die beiden Kräfte P, Q die einzigen sind, welche bei dieser Verschiebung mechanische Arbeit verrichten, und dass die Summe der augenblicklichen Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten ergibt sich der Werth $Pa\varepsilon - Qb\varepsilon$.



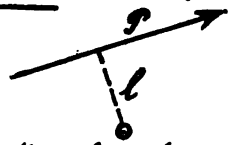
Setzen wir nun den Satz, die virtuellen Geschwindigkeiten dieser Verschiebung

gleich Null, so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts: $Pa = Qb$ (oder $a = b$ wenn $Q = P$ sein soll.) Auch für eine um den Ursprung drehende Lage der Kanten CE u. DF sein. da die Gleichung die Gleichgewichtsbedingung darstellen. —

Momentensatz.

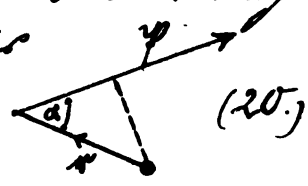
Der Abstand einer Kraft von einem festen Punkte wird statisches Moment genannt, der Punkt heißt Momentenpunkt und der senkrechte Abstand wird Hebelarm der Kraft genannt

$M = P.l$



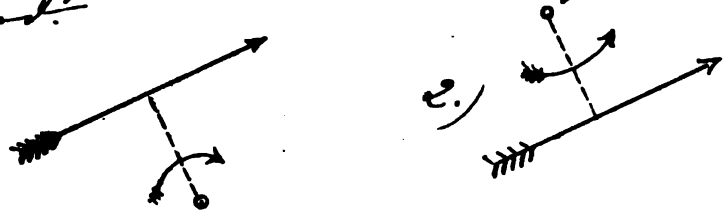
Legt man die Kraft $\mathfrak{P}$ als Vektor gegeben und ist der Angriffspunkt der Kraft vom Momentenpunkt um die Vektor $\mathfrak{r}$ entfernt, so wird das Moment $= r.\sin\alpha.P$ oder nach der Definition des Vektorprodukts

$M = V\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{P}.$ (20.)



Das Vektorprodukt $V\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{P}$ ist selbst wieder eine gerichtete Größe und zwar steht es senkrecht zur Ebene von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{P}$, so daß die Aufeinanderfolge

r, F, M ein Kräftesystem ergibt, daß also durch Addition von r und F und Subtraktion in der Richtung von M eine Kraftschraube ergänzt wird.



Im 1) ist also der Teil von M zum Lastpunkt abgemindert, im 2) dem Lastpunkt zugemindert.

Der Punkt von M, r Punkt, wird durch die Linie des aus F und r konstruierten Parallelogramms graphisch dargestellt und kann mit Hilfe eines geeigneten Maßstabes als Länge aufgetragen werden.

Statt des Parallelogramms nimmt man meist nur das Dreieck gebildet aus r u. F, dessen Flächeninhalt die Hälfte desjenigen des Parallelogramms ist; man muß dabei nur die Maßstabkonstante verdoppeln. Ein derartiges Dreieck wird Momentandreieck genannt.

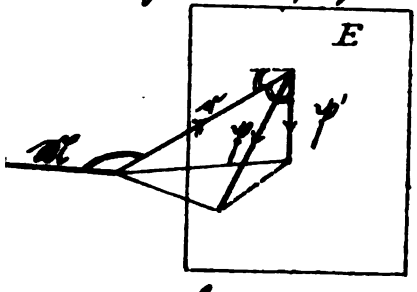
Wenn $R = \Sigma(F)$ die Resultante eines Kräftesystems ist, die an einem materiellen Punkt

ungreifen, so ist nach den in der Einleitung besprochenen Gesetzungen auch

$$V_r R = \Sigma V_r \mathfrak{P}, \text{ d. h.} \qquad (21.)$$

„das statische Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte“ (die Übersichtlichkeit ist wie immer bei Kelvin eine geringe).

Der Satz, dieser Satz, der den Namen <u>Momentensatz</u> führt, ist durch die mathematischen Gesetzungen des Vektorprodukts bereits erledigt. Nun aber einen Satz so erledigt haben, der sich direkt aus den mechanischen Gesetzungen folgern lässt, liegt nun doch den Angriffspunkt der Kräfte in eine Ebene E projiziert, dann sind diese Kräfte auf diese Ebene. Die aus der Figur ersichtlich, ist



$$V_r \mathfrak{P} = V_{r'} \mathfrak{P}'$$

denn sie sind inhaltsgleich, ferner ist

$$R' = \Sigma (\mathfrak{P}')$$

Nun können die Vektorprodukte in beliebiger Reihenfolge gestellt werden. Man kann denselben auch so wählen, dass der Momentenvektor $V_{r'} \mathfrak{P}'$ durchlaufen

Länge dargestellt wird, wie $\mathfrak{P}'$; hat man diese für alle Kräfte durchgeführt, so liegen alle Momentanachsen in einer zu E. parallelen Ebene (die M stehen sämtlich senkrecht auf r).

Das Kräftepaar der Momente ist dann dem der Projektionen in E. kongruent, nur um einen rechten Winkel dagegen verdreht. Da nun $R' = \Sigma \mathfrak{P}'$, ist auch $V \cdot R' = \Sigma (V \cdot \mathfrak{P}')$ oder:

$$V \cdot R = \Sigma (V \cdot \mathfrak{P}).$$

Wenn $\Sigma \mathfrak{P} = 0$ ist, so ist auch $\Sigma (V \cdot \mathfrak{P}) = 0$, d. h. für ein Gleichgewichtssystem ist die Summe der statischen Momente der Kräfte stets 0.

Liegen alle Kräfte parallel der Momentpunkt in einer Ebene, so stehen alle Momentanachsen senkrecht zu dieser Ebene; sie sind also parallel und können algebraisch summiert werden, wobei zu den rechtsdrehenden Momenten gerechnet ist.

Projiziert man ein Kräftesystem parallel den Momentanpunkt auf eine Ebene, so ist, da

$$R' = \Sigma \mathfrak{P}', \text{ auch}$$
$$V \cdot R' = \Sigma V \cdot \mathfrak{P}', \qquad (22)$$

wobei die Summierung in eine algebraische übergeht.

Anmerkung. Nach Gl. (14) der Einleitung ist

$$V \cdot \mathfrak{P} = - V \mathfrak{P} r.$$

Als Moment einer Kraft bezüglich einer Achse bezeichnet man jenes, welches man durch Projektion auf die Achse aus dem Momentenvektor erhält, den die Kraft für irgend einen Punkt der Achse liefert, oder auch das Moment der Projektion der Kraft auf eine zur Achse senkrechte Ebene (für den Durchstoßpunkt der Achse genommen.)

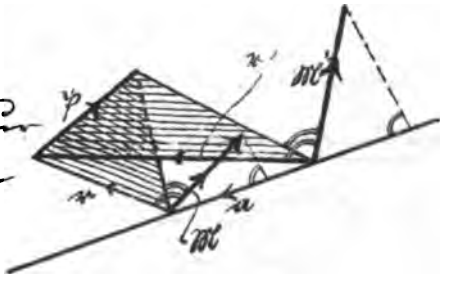
Durch diese verschiedenen Deutungen zu demselben Endergebnis führen, beweist man, indem man zuerst die Momente der Kraft bezüglich zweier Punkte der Achse betrachtet.

Es sei

$r' = r + a$, dann ist

$V r' p = V r p + V a p$

$V a p$ steht aber senkrecht zur Achse und fällt daher beim Projicieren fort, die Wahl des Momentenpunktes hat also keinen Einfluß auf die Größe der Projektion des Momentenvektors und man ist daher berechtigt, von einem Momente bezüglich einer Achse zu sprechen. Zur zweiten Deutung gelangt man, wenn man die Kraft in eine Komponente parallel zur Achse und



Länge dargestellt wird, wie $\mathfrak{P}'$; fasst man diese für alle Kräfte durchgeführt, so liegen alle Momentanaxen in einer zu E. parallelen Ebene (die M stehen sämtlich senkrecht auf r).

Das Kräftedreifach der Momente ist dann dem der Projektionen in E. kongruent, nur um einen rechten Winkel dagegen verdreht. Da nun $R' = \Sigma \mathfrak{P}'$, ist auch $V \cdot R' = \Sigma (V \cdot \mathfrak{P}')$ oder:

$$V \cdot R = \Sigma (V \cdot \mathfrak{P}).$$

Wenn $\Sigma \mathfrak{P} = 0$ ist, so ist auch $\Sigma (V \cdot \mathfrak{P}) = 0$, d. h. für ein Gleichgewichtssystem ist die Summe der statischen Momente der Kräfte gleich 0.

Liegen alle Kräfte samt den Momentpunkt in einer Ebene, so stehen alle Momentanachsen senkrecht zu dieser Ebene, sie sind also parallel und können algebraisch summiert werden, wobei nur auf das Vorzeichen Rücksicht genommen ist.

Projiziert man ein Kräftesystem samt dem Momentanpunkt auf eine Ebene, so ist, da

$$R' = \Sigma \mathfrak{P}',$$ auch

$$V \cdot R' = \Sigma V \cdot \mathfrak{P}', \qquad (22)$$

wobei die Summierung in eine algebraische übergeht.

Anmerkung. Nach Gl. (14) der Einleitung ist

$$V \cdot \mathfrak{P} = - V \mathfrak{P} r.$$

Als Moment einer Kraft bezüglich einer Achse bezeichnet man jenes, welches man durch Projektion auf die Achse aus dem Momentvektor erhält, den die Kraft für irgend einen Punkt der Achse liefert, oder auch das Moment der Projektion der Kraft auf eine zur Achse senkrechte Ebene (für den Durchstoßpunkt der Achse genommen.)

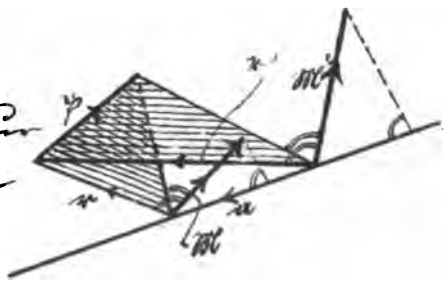
Daß diese verschiedenen Deutungen zu demselben Endergebnis führen, beweist man, indem man zuerst die Momente der Kraft bezüglich mehrerer Punkte der Achse betrachtet.

Es sei

$r' = r + a$, dann ist

$V r' p = V r p + V a p$

$V a p$ steht also senkrecht zur Achse und fällt daher beim Projicieren fort, die Masse des Momentenpunktes hat also keinen Einfluß auf die Größe des Projektionsmomentenvektors und man ist daher berechtigt, von einem Momente bezüglich einer Achse zu sprechen. Zur zweiten Deutung gelangt man, wenn man die Kraft in eine Komponente parallel zur Achse und



in eine Tabelle zu bestellen gelegt. Der Nenner der ersteren ist = 0, der der letzteren gleich den obenangegebenen.

Dimensionen der Grössen in der Mechanik.

Nachdem nun alle Fundamentalgrössen der Mechanik definiert sind, soll kurz ihr Zusammenhang mit den einfachen Masseinheiten gezeigt werden. Man unterscheidet in der Mechanik 3 Grundmasse:

1.) die Länge
2.) die Zeit und
3.) entweder die Masse od. die Kraft.

(Siehe Seite 6.)

der Weg ist eine einfache Länge = L^1;
Geschwindigkeit ist Weg pro Zeiteinheit $\frac{L}{T} = L^1T^{-1}$
Beschleunigung ist Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit $= \frac{L^1T^{-1}}{T} = \ldots\ldots\ldots\ldots L^1T^{-2}$

Für die Masse als Fundamentaleinheit $= M^1$
ist Kraft = Masse × Beschleunigung $= M^1L^1T^{-2}$

Arbeit = Kraft × Weg, ferner
Lebendigkeiten $= \frac{mv^2}{2}$ } $= M^1L^2T^{-2}$
Bewegungsgrösse $= mv$ und
Antrieb $= \int Pdt$ } $= M^1L^1T^{-1}$

Moment = Kraft × Hebelarm = ... $M^1L^2T^{-2}$;
es hat also dieselben Dimensionen, wie Arbeit und Lebendigkeitsenergie, ist aber trotzdem ganz anderer Natur, da die Art der Multiplikation, wie sie völlig verschieden ist, durch die verschieden sind.

Unter Zugrundelegung der Kraft als Konst (K) erhält man:

$$\text{Masse} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} = K^1L^{-1}T^2$$

Arbeit = Lebendigkeitsenergie = K^1L^1
Lebendigkeitsgröße = Antrieb = K^1T^1
Moment = ... K^1L^1

In der Physik ist die Längeneinheit = 1 cm, die Zeiteinheit = 1 Sekunde, die Masseneinheit die Masse eines ccm Wasser, in der Technik ist die Längeneinheit meist = 1 m, die Zeiteinheit wie oben = 1 Sekunde, die Einheit der Kraft = 1 kg (Gewicht eines ccm Wasser).

Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Einen allgemeinen festen materiellen Punkt ist der ganze unbegrenzte Raum als Lebendigkeitsgebiet zugänglich. Sind jedoch seiner

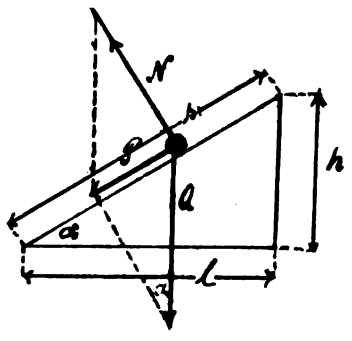
Bewegung eine, zwei oder drei Bedingungen vorgeschrieben (müssen seine Koordinaten x, y u. z eine, zwei oder drei Bedingungsgleichungen erfüllen) so ist das Gebiet des Punktes auf eine Fläche, eine Linie oder einen Punkt beschränkt, im zweiten Fall heißt die Bewegung zwangläufig, im dritten ist der Punkt fest. Dieser letzte Fall hat für das Problem der Bewegungen selbstverständlich kein Interesse.

Die Einschränkung des Bewegungsgebietes des materiellen Punktes kommt stets durch Kräfte zustande, die immer gerade in solcher Größe auftreten, daß die Bewegung auf der vorgeschriebenen Bahn bleibt. Solche Kräfte sind z. B. der Druck senkrecht gegen die auf sie gleitenden materiellen Punkte, oder die Spannung beim Pendel. Man nennt diese Kräfte Widerstandskräfte, Zwangskräfte, Reaktionen.

Die Widerstandskraft der Bahn kann in 2 Komponenten, eine Tangential- u. eine Normalkomponente zerlegt werden. Die Tangentialkraft ist meist eine Reibungskraft. Sie stellt die Reibung dar. Die Reibung wirkt stets der Bewegung entgegen, da dieselbe nur die Bewegung ver-

gegeben; aber auf die Bewegung der Last keinen Einfluß hat, liegt sie zur Aufrechterhaltung der Gleichgewichtsbedingungen nicht bei. Sie wird später behandelt werden und soll zunächst ganz unberücksichtigt bleiben.

1) Die schiefe Ebene.



Auf den Punkt wirkt sein Gewicht Q und die Spannkraft, der Normaldruck N der schiefen Ebene. Da die Bewegung als gerade Linie vorgeschrieben ist, kann die Resultierende nur in Richtung der Bahn fallen und es ergibt sich aus dem Kräftedreieck

$$P = Q \sin\alpha = \frac{Qh}{s}$$

$$N = Q \cos\alpha = \frac{Ql}{s}$$

Die Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte (resp. verzögerte). Die Beschleunigung ist

$$b = \frac{P}{Q} g = g \sin\alpha;$$

ferner ist

$$v^2 - v_0^2 = 2bs - 2g\frac{s}{h}\sin\alpha - 2gh,$$

also ganz unabhängig von der Neigung der Bahn, nur von der Höhendifferenz abhängig.

Für ein unendlich kleines Stück einer stetigen Bahn ist

$$d(v^2) = -2g\,dh,$$

wenn h nach oben positiv gerechnet wird.

Integriert man diese Gleichung über eine beliebige Bahn, so ist

$$v^2 - v_1^2 = 2g\int dh = 2g(h_1 - h)$$ und

ist $v_1 = 0$, so ist

$$\underline{v = \sqrt{2gh}}$$

Die Größe der lebendigen Kraft, welche der Körper in einer bestimmten Höhe der Bahn besitzt, ist also nur von der Höhen-differenz abhängig, um welche der Körper gesunken ist, und ganz unabhängig von der Art der Bahn, welche diese Senkung kann man auch noch auf folgende Weise an der Arbeit fordern:

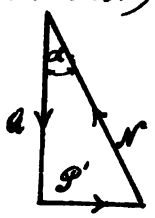
$$Ah = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2}, \text{ hieraus } \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + Ah$$

Eine Kraft die in der Richtung der schiefen Ebene wirkend mit der Schwerkraft Gleichgewicht halten soll, muß nach den Resultierenden

$$P = Q \sin\alpha - Q\frac{h}{s}$$ sein.

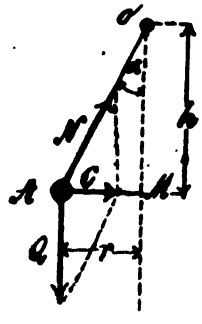
Soll eine horizontal wirkende Kraft P Gleichgewicht herstellen, so müß die Resultante aus P und Q in die Normale der schiefen Ebene fallen (siehe Kräftebild). Es wird

$$P' = Q \operatorname{tg}\alpha = \frac{Qh}{l}$$



2. Das konische Pendel.

Ein materieller Punkt A sei durch einen gewichtslosen starren Stab mit dem Punkt O aufgehängt und führe eine Rotation um die Achse OM eine gleichförmige Rotation aus.



Nach dem Momentensatz ist für den Punkt O als Momentenpunkt:

$$Qr = Cr.$$

$$v^2 - v_0^2 = 2bs - 2g s \frac{\sin\alpha}{h} = 2gh,$$

also ganz unabhängig von der Neigung der Ebene, nur von der Höhendifferenz abhängig.

Für ein unendlich kleines Stück einer stetigen Kurve ist

$$d(v^2) = -2g\,dh,$$

wenn h nach oben positiv gerechnet wird.

Integriert man diese Gleichung über eine beliebige Kurve, so ist

$$v^2 - v_1^2 = 2g\int dh = 2g(h_1 - h) \text{ und}$$

ist $v_1 = 0$, so ist

$$\underline{v = \sqrt{2gh}}$$

Die Größe der lebendigen Kraft, welche der Körper in einer bestimmten Stelle der Bahn besitzt, ist also nur von der Niveau-Differenz abhängig, um welche der Körper gesunken ist, und ganz unabhängig von der Art der Kurve, welche er dabei beschrieben hat. Aus dem Satz von der Arbeit folgt:

$$\Delta h = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2}, \text{ hieraus } \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \Delta h$$

Eine Kraft die in der Richtung der schiefen Ebene wirkend mit der Schwerkraft Gleichgewicht halten soll, muß wie aus der Aufstellung

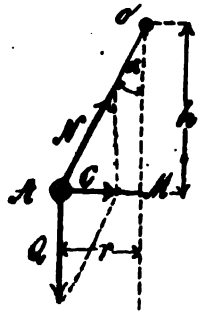
$$P = Q \sin\alpha = Q\frac{h}{s}$$ sein.

Soll eine horizontal wirkende Kraft P Gleichgewicht herstellen, so müß die Aufstellung mit P und Q in die Normale der schiefen Ebene fallen (siehe Kräftedreieck). Es wird

$$P' = Q\,tg\alpha = \frac{Qh}{l}$$

2. Das konische Pendel.

Ein materieller Punkt M sei durch einen gewichtslosen starren Stab OM um den Punkt O in Schwingung versetzt. Sie sei im Abstand M = r von der Achse OA eine gleichförmige Rotation aus.



Nach dem Momentensatz ist für den Punkt O als Momentenpunkt:

$$Qr = Cr.$$

$$C = \frac{Q}{g}\frac{v^2}{r} \qquad C = \frac{Qr}{h}.$$

ferner

$$v^2 = \frac{gr^2}{h}$$

die Umlaufszeit ist

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}$$

die Endspannung ist

$$\frac{Q}{g}\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$

die Umlaufszeit ist also nur von der Intensität der Schwerkraft und der Höhe abhängig; bei sehr kleiner Ausschlagweite h nicht merklich von l verschieden, das Pendel ist dann mehr ~~isochron~~.

Mechanik des starren Körpers.

Begriff des starren Körper.

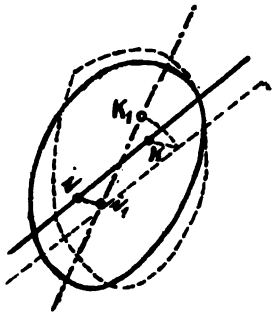
Sind beliebig viele (endlich viele) materielle Punkte in endlich kleinen Abständen in solcher Weise miteinander zu einem Punktsystem verbunden, dass sie auf keine Weise ihre gegenseitigen Entfernungen ändern können, so nennt man dieses Punkt-

fassen einen starren Körper. In der Na-
tur gibt es keinen absolut starren Körper, da
selbst der härteste Stein unter dem Einfluss
der Wärme oder sehr grosser Kräfte seine
Form ändert, man kann jedoch einen
Körper stets dann als einen starren betrach-
ten, wenn er nur während der Vorgänge,
in welchen man ihn betrachtet, keine merk-
lichen Formänderungen erleidet.

Bewegung eines starren Körpers.

Kann bei der Bewegung eines Kör-
pers alle Punkte parallele und kongruente
Bahnen beschreiben, so heißt diese Bewe-
gung eine fortschreitende oder Translation
(Elementarverschiebung). Bleiben jedoch bei der
Bewegung eines Körpers zwei Punkte,
die alle auf einer Geraden (Drehachse)
liegen, in Ruhe und beschreiben die an-
deren Punkte Kreisbahnen, deren Mittelpunk-
te auf der genannten Geraden liegen u.
deren Ebenen senkrecht zu dieser Geraden ste-
hen, so nennt man diese Bewegung Rotation
(Elementardrehung). Die Bewegung eines Kö-
pers aus einer Lage in eine benachbarte kann

nun stets gelangt werden, in eine Transla-
tion, welche zunächst einen be-
liebig gewählten Punkt i des
Körpers in die Lage i_1 überführt
und in eine Drehung
(Rotat) um einen durch diesen
Punkt gehende Achse, durch
welche der Punkt k in die
Lage k_1 gelangt. die Reihen-
folge, in welcher diese beiden Lagerungen
erfolgen, ist gleichgültig; es ist daher einen
bestimmten Sinn, wenn man sagt, der
Kg. seine beide Lagerungen gleichzeitig auf
(wenn man sich nämlich den Zeitraum
der Aufeinanderfolge beider Lagerungen
unendlich klein denkt.) die Drehung wird
als ein Vektor dargestellt, der auf der Drehe-
ne auf jener Richtung sein abgetragen
wird, die mit dem Sinn der Drehung zu-
sammen eine rechtsgängige Schraubenbewe-
gung bestimmt und dessen Größe in einem
beliebig zu wählenden Maßstabe den Dre-
hwinkel in Bogenmaß angibt.

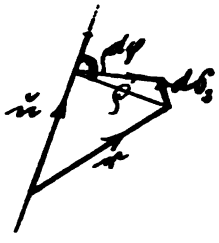


Die Winkelgeschwindigkeit wird durch ei-
nen Vektor ($\vec{w}$) dargestellt, dessen Richtung

die der Drehachse des Körpers ist (dessen Richtung auf der Ebene der Kreisbahn eines jeden Punktes senkrecht steht) und zwar mit einer Zahl, die mit der Drehung gleichzeitig eine Kraftfunktion liefert.

Der Faktor ist gleich der absoluten Geschwindigkeit eines Punktes, der im Abstand 1 von der Achse sich befindet. Dimension der Winkelgeschwindigkeit ist T^{-1}, Winkel: Zeit (der Winkel als das Verhältnis von Bogen zu Radius ist eine absolute Zahl).

Durch obige Zerlegung der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers in Translation und Rotation gelangt man zu einer Klassifizierung der Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Körpers. Durch die Translation erhalten alle Punkte dieselbe Bewegung d.h. Zufolge der Rotation hat ein Punkt im Abstand ϱ den Weg $\varrho\, d\varphi$ zurückgelegt. Nun ist $\varrho = r \sin(\alpha)$ und $d\varphi = \omega dt$;



nun stets gelangt werden, in eine Transla-
tion, welche zunächst einen be-
liebig gewählten Punkt i des
Körpers in die Lage i_1 überführt
und in eine Drehung
(Rotat) um einen durch diesen
Punkt gehende Achse, durch
welche der Punkt k in die
Lage k_1 gelangt. die Reihen-
folge, in welcher diese beiden Lagerungen
erfolgen, ist gleichgültig; es ist daher einen
bestimmten Sinn, wenn man sagt, der
Kg. seine beide Lagerungen gleichzeitig auf
(wenn man sich nämlich den Zeitraum
der Aufeinanderfolge beider Lagerungen
unendlich klein denkt.) die Drehung wird
als ein Vektor dargestellt, der auf der Drehe-
ne auf jener Richtung sein abgetragen
wird, die mit dem Sinn der Drehung zu-
sammen eine rechtsgängige Schraubenbewe-
gung bestimmt und dessen Größe in einem
beliebig zu wählenden Maßstabe den Dre-
hwinkel in Bogenmaß angibt.

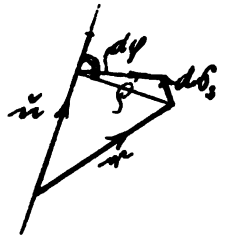
Die Winkelgeschwindigkeit wird durch ei-
nen Vektor ($\vec{w}$) dargestellt, dessen Richtung

die der Drehachse des Körpers ist (dessen Richtung auf der Ebene der Kreisbahn eines jeden Punktes senkrecht steht) und zwar mit einem Teil, der mit der Drehung zusammen eine Rechtsschraube liefert.

Der Faktor ist gleich der absoluten Größe der Winkelgeschwindigkeit eines Punktes, der im Abstand 1 von der Achse sich befindet. Dimension der Winkelgeschwindigkeit ist T^{-1}, Winkel: Zeit (der Winkel als das Verhältnis von Bogen zu Radius ist eine absolute Zahl).

Winkel / Zeit T^{-1}

Durch obige Zerlegung der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers in Translation und Rotation gelangt man zu einer Klassifizierung für die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Körpers. Durch die Translation erhalten alle Punkte dieselbe Bewegung $d\sigma_1$. Infolge der Rotation legt ein Punkt im Abstand ϱ den Weg $\varrho\, d\varphi$ zurück. Nun ist $\varrho = r \sin(\vec{u}, \vec{r})$ und $d\varphi = \omega dt$;



ferner

$$\S d\varphi = \omega dt\, r \sin(\vec{\omega} r).$$

Der Weg $d\delta_2$ steht senkrecht auf der Ebene aus $\vec{\omega}$ und r und außerdem bildet die Aufeinanderfolge $\vec{\omega}, r, d\delta_2$ ein rechtsschraubiges Dreibein. Infolgedessen ist

$$d\delta_2 = V(\vec{\omega} dt)\, r = dt\, V_{\vec{\omega} r}.$$

Nun ist

$$d\delta = d\delta_1 + d\delta_2 = d\delta_1 + dt\, V_{\vec{\omega} r}.$$

Durch dt dividiert liefert diese Gleichung, wenn die Translationsgeschwindigkeit des Punktes der Achse, von dem nach der Vektor r gezogen ist, mit v_0 bezeichnet wird:

$$v = v_0 + V_{\vec{\omega} r} \qquad (23.)$$

Anmerkung: $V_{\vec{\omega} r}$ liegt immer in einer zur Achse senkrechten Ebene, es ist infolgedessen die der Achse parallele Komponente von v konstant, gleich der von v_0, da die Komponente von $V_{\vec{\omega} r}$ immer $= 0$ ist. Trägt man daher die Geschwindigkeiten v von einem Punkt aus ab, so liegen alle Endpunkte der Vektoren in einer zu der Achse senkrechten Ebene.

Es geht daraus weiter hervor (da wenn

eben durch drei gegebene Punkte, die nicht in eine Gerade fallen, festgelegt ist) daß der Bewegungszustand eines Körpers als gegeben zu betrachten ist, wenn von drei Punkten desselben die Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach bekannt sind, vorausgesetzt, daß nicht zufällig die so drei Geschwindigkeiten einer und derselben Ebene parallel sind, wenn die drei Punkte in eine Gerade fallen würden.

Durch die beiden Relationen (a) und (b) in Gleichung (23.) wird der augenblickliche Geschwindigkeitszustand des Körpers vollständig bestimmt. Da jeder Punkt drei Bestimmungen zu seiner Festlegung erfordert, hängt die augenblickliche Bewegung von 6 Bestimmungen ab. Man spricht daher beim starren Körper von sechs Freiheitsgraden. (Beim freien Körper sind Translationen in den drei Koordinatenrichtungen (x, y u. z), sowie Rotationen um diese drei Achsen möglich.)

Wählt man statt des Punktes O irgendeine Position der Bewegung einen anderen Punkt, dessen Radiusvektor von O gleich r ist und zieht von diesem die Radien-

Radiusvektor r', so ist für jeden Punkt

$$r = a + r'.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (23) ein, so erhält man:

$$s = s_0 + \vec{V} \cdot \vec{a} + \vec{V} \cdot \vec{r}' \ldots\ldots (24)$$

Die beiden ersten Glieder geben aber nach Gleichung (23) die Geschwindigkeit s_a des Punktes a an und daher wird nach:

$$s = s_a + \vec{V} \cdot \vec{r}' \ldots\ldots (25)$$

Es gilt demnach Gleichung (23) sofort auch für jeden anderen Anfangspunkt, wobei nur die Geschwindigkeit s_0 durch s_a zu ersetzen ist, während die Winkelgeschwindigkeit $\vec{v}$ für jede Wahl des Anfangspunktes dieselbe bleibt. —

Durch geeignete Wahl von a kann man das Glied $\vec{V} \cdot \vec{a}$ in Gleichung (24) jede beliebige Größe und auch jede Richtung geben, die in einer zu $\vec{v}$ senkrechten Ebene enthalten ist. Setzt man s_0 selbst senkrecht zu $\vec{v}$, so kann man a stets so wählen, daß das Glied s_a in (25) verschwindet; die Lagengleichung besitzt dann in einer einfachen Drehung um eine durch den Punkt a in der Richtung $\vec{v}$ gehende

Achse. Im andern Falle kann man wenigstens so ermitteln, daß die zu A senkrechte Komponente von a berechnet. Für diese a ist dann a in Gleichung (35) gleichgerichtet mit v. Die Lagerung besteht nun einer Drehung um die durch A gehende Achse B und einer fortschreitenden Lagerung längs dieser Achse.

Man nennt diese Lagerung, aus der sich jede Elementarbewegung eines starren Körpers zusammensetzen läßt, Elementarschraubenbewegung, die Achse derselben heißt den Raum Momentanachse. Demnach ist jede beliebige allgemeine Lagerung als eine stetige Aufeinanderfolge von Elementarschraubenlagerungen bei fortwährend wechselnden Achsen zu denken. Der Begriff der Elementarschraubenbewegung schließt die Begriffe der Rotation und Translation als spezielle Fälle in sich ein, je nachdem die Geschwindigkeit des Endpunktes in der Richtung der Schraubenachse gleich 0 oder die Geschwindigkeit der Drehbewegung gleich 0 ist.

Läßt ein starrer Körper zwei endliche Verschiebungen um zwei durch den Punkt O gehende Achsen aufeinanderfolgen, so ist das Resultat eine

der Aufeinanderfolge der Drehungen abhängig. Man kann in diesem Falle nicht sagen, daß der Kg. beide Drehungen gleichzeitig ausführe. Bei unendlich kleinen Drehungen verschwindet aber der Unterschied. Man kann daher sagen, daß ein Körper zwei Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ und $\vec{\omega}'$ zugleich besitze. Der Kg. infolge von $\vec{\omega}$ im Zeitelement dt ist für den Punkt r gleich $dt\,\vec{V}_{\vec{\omega}r}$ und der infolge von $\vec{\omega}'$ gleich $dt\,\vec{V}_{\vec{\omega}'r}$. Die geometrische Summe beider ist:

$$dt\,\vec{V}_{\vec{\omega}r} + dt\,\vec{V}_{\vec{\omega}'r} = dt\,\vec{V}_{(\vec{\omega}+\vec{\omega}')r}$$

Es können demnach Winkelgeschwindigkeiten ebenso zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden wie Linearen Geschwindigkeiten.

Kräfte am starren Körper.

Nach der Definition besteht der starre Körper aus materiellen Punkten, die fest miteinander verbunden sind, sodaß eine relative Lageänderung dieser beliebig gegen einander ausgeschlossen ist. Diese Zusammensetzung wird durch innere Kräfte (Molecularkräfte, Cohaesion) erhalten, für welche das Princip der Action und Reaction gilt.

Dieses von Newton ausgesprochene Prinzip
sagt aus:

„Jeder Kraftwirkung entspricht eine
gleich große aber entgegengesetzt gerichtete
Gegenwirkung." Der Widerstand, den die
einzelnen Teile eines starren Körpers ei-
ner Verschiebung durch die äußeren Kräfte ent-
gegensetzen, beruht auf diesem Prinzip,
d. h. auf der Reaktion der inneren Kräf-
te und bedingt dessen Festigkeit. Greifen
an ein und demselben materiellen
Punkte eines Körpers Kräfte an, so können
diese einfach zu einer Resultierenden
zusammengesetzt werden. Greifen je-
doch an zwei (oder mehreren) verschie-
denen Punkten des Körpers Kräfte an, so
lassen sich diese allerdings in Bezug auf
den äußeren Bewegungszustand des Kör-
pers auch durch eine Resultierende er-
setzen, in Bezug auf die Verteilung der inne-
ren Kräfte würde bei einer derartigen Kräf-
tezusammensetzung eine Änderung eintreten.
Es ist daher in allen Fällen, bei welchen
die Größe und Verteilung der inneren
Kräfte in Frage kommt (z. B. wenn die

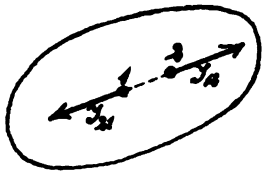
Formänderungen des Körperschwerpunkts verbunden sollen) eine Resultierende nicht als gleichwertiger Ersatz der an verschiedenen Punkten des Körpers wirkenden Kräfte zulässig, die wirklich erfolgende Bewegung irgend eines materiellen Punktes ist demnach zu betrachten als Wirkung der an ihm zugleich angreifenden äußeren und inneren Kräfte.

Es zeigt sich jetzt, daß die inneren Kräfte auf den Bewegungszustand des starren Körpers keinen Einfluß haben, da jeder von einem beliebigen materiellen Punkt des Körpers auf einen benachbarten übertragene von innerer Kraft eine gleich große entgegengesetzt gerichtete auffindet, die an dem benachbarten wirkt und daher die Wirkung nach außen vernichtet.

Durch die Auffassung des starren Körpers als Punktsystem wird die Übertragung der für den materiellen Punkt aufgestellten Sätze auf den starren Körper ermöglicht.

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn sich an jedem seiner Punkte

alle Kräfte das Gleichgewicht halten. Umgekehrt gibt sich ein solcher Gleichgewichtszustand dadurch kund, daß der Körper eine gleichförmige geradlinige Bewegung annimmt oder in Ruhe ist.



Aus dem Satze von der Wirkung und Gegenwirkung folgt, wenn S_{12} die am Punkte 1 am Punkte 2 hervorgebrachte Kraft und S_{21} die am 2 am 1 hervorgebrachte Kraft ist:

$$S_{21} = -S_{12} \quad \text{oder} \quad S_{21} + S_{12} = 0$$

Durch Übertragung über den ganzen Körper erhält man

$$\underline{\Sigma S = 0}$$

die Bedingung, daß sich an jedem Punkt die Kräfte gleichgewicht halten müssen. Heißt, wenn a_1 die Resultierende der äußeren Kräfte und ΣS_1 die der inneren Kräfte am Punkt 1 ist:

$$a_1 + \Sigma S_1 = 0$$
$$a_2 + \Sigma S_2 = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\overline{\Sigma a + \Sigma(\Sigma S) = 0}$$

die Summierung ist über den ganzen Körper zu erstrecken, dann ist

$$\Sigma(\Sigma Y) = 0 \qquad \text{und daher}$$

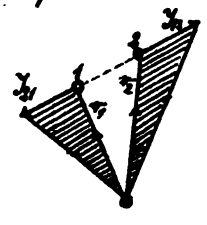
$$\underline{\Sigma A = 0} \qquad (26)$$

Kann also an einem Körper Gleitung nicht bestehen, so muß die geometrische Summe der an ihm wirkenden äußeren Kräfte = 0 sein. Es ist das eine notwendige, aber nicht hinreichende Gleitungsmöglichkeitsbedingung.

Durch Projektion erhält man den Komponentensatz:

$$\underline{\Sigma A' = 0} \text{ oder } \underline{\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0} \qquad (26a)$$

Eine weitere Gleitungsmöglichkeitsbedingung liefert der Momentensatz. Es ist



$$V r_1 \gamma_{21} = -V r_2 \gamma_{12} \quad \text{(skalar sind gleichgroß)}$$

Am ganzen Körper ist daher

$$\Sigma V r \gamma = 0;$$

ferner ist für jeden Punkt des Körpers

$$V r_1 \psi_1 + \Sigma V r_1 \gamma_1 = 0$$
$$V r_2 \psi_2 + \Sigma V r_2 \gamma_2 = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Sigma V r \psi + \Sigma V r \gamma = 0, \qquad \text{und da}$$

$\Sigma V_r J = 0$ ist: fat man als zweite Gleichgewichtsbedingung:

$$\Sigma V_r \psi = 0 \qquad (24)$$

d.j. die fatan Momentenpunkt muß die Summe der statischen Momente der äußeren Kräfte = 0 sein.

Durch Projektion erhält man nun für x-richtung

$$\Sigma V_r \psi' = 0 \qquad (24a)$$

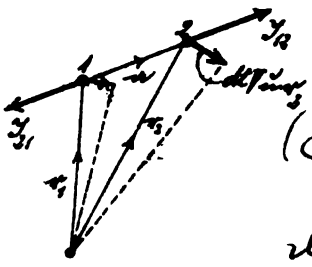
die dritte Gleichgewichtsbedingung liefert den Zug zur Arbeitsm. Für jede Verrückung muß sein

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_1 \delta_1 + \Sigma J_1 \delta_1 \\ 0 &= \psi_2 \delta_2 + \Sigma J_2 \delta_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \hline 0 &= \Sigma \psi \delta + \Sigma J \delta \end{aligned}$$

Während der Komponenten und der Momentensatz sowohl für starre, wie für elastische Körper gilt, muß für unterschieden werden. Am starren Körper sehen sich bei einer Translation die Arbeiten von J_{21} und J_{12} auf:

$$J_{21} \delta + J_{12} \delta - (J_{21} + J_{12}) \delta = 0$$

Für eine Rotation des Körpers ist.



$$\gamma_{21}\,dt\,\vec{v}_1 = \gamma_{21}\,dt\,\vec{\omega}\times r_1 + \gamma_{12}\,dt\,\vec{\omega}\times r_2 =$$
$$\gamma_{21}\,dt\,\vec{v}_1 + \gamma_{12}\,dt\,(\vec{\omega}\times r_1 + \vec{\omega}\times r) -$$
$$\underbrace{(\gamma_{21}+\gamma_{12})}_{0}\,dt\,\vec{\omega}\times r_1 + \underbrace{\gamma_{12}\,dt\,\vec{\omega}\times r}_{0} = 0$$

das gesamte Glied ist auch $=0$, da $\vec{\omega}\times r \perp r$ und infolgedessen auch $\perp \gamma_{21}$ ist.

Durch Summierung über den ganzen Körper erhält man

$$\Sigma\,\gamma\,\delta = 0$$

Es ist also für den starren Körper

$$\Sigma\,\vec{\gamma}\,\delta = 0 \qquad (28)$$

beim elastischen Körper ist $\Sigma\,\vec{\gamma}\,\delta$ gleich der Formänderungsarbeit.

Die Zusammensetzung von Kräften am starren Körper.

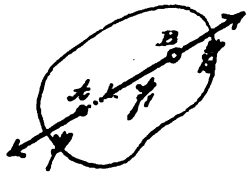
Der einfache Vorgang einer starren Körperdrehung, gleichgültig ob derselbe sich in Ruhe befindet oder von irgendwelchen Kräften weiterbewegt wird, wenn man an dem Körper gerade entgegengesetzt gerichtete aber gleiche Kräfte anbringt, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. Der Satz folgt daraus, daß bei jeder virtuellen Lage

gung die Arbeit der zugeführten Kräfte gleich Null ist. Lagerung und die Verteilung der inneren Kräfte tritt durch Hinzufügung der beiden Kräfte, also rasch eine Änderung ein. Infolgedessen darf man von dem gemachten Satze, der den Ausgangspunkt für die Zusammensetzung von Kräften bildet, bei Aufgaben der Festigkeitslehre nur mit Vorsicht Gebrauch machen.

Aus diesem Satze folgt sofort der Satz von der

Verschiebung des Angriffspunktes: Der Angriffspunkt einer Kraft darf sich an starren Körper beliebig längs deren Richtungslinie verlegen.

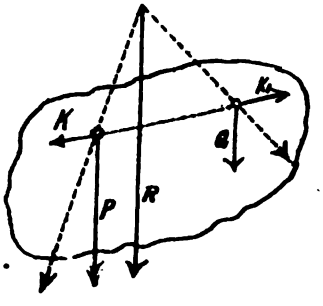
Lemma: An einem Punkt A des Körpers wirke die Kraft P. Bringt man nun in der Richtungslinie von P irgend einen Punkt B an, gleiche und entgegengesetzte Kräfte P_1 und P_2 an, die mit P gleich groß und parallel sind, so kann man P mit P_2 zusammensetzen, die sich dann gegenseitig aufheben und als resultierende Kraft bleibt P_1 übrig, womit sich der Satz ergibt.



Auf Grund der oben aufgestellten Sätze lassen sich zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich schneiden, stets zu einer Mittelkraft vereinigen.

Man verlegt den Angriffspunkt der Kräfte auf den Schnittpunkt der Richtungslinien u. setzt die Kräfte an diesem Punkte zusammen.

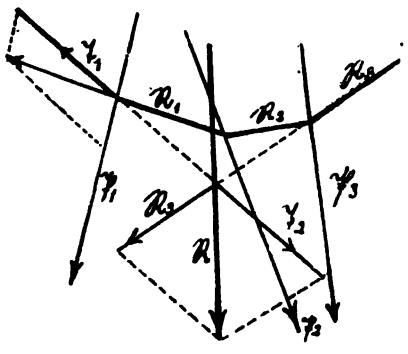
Parallele Kräfte lassen sich zusammensetzen, indem man längs einer sie schneidenden Richtungslinie zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die also nichts ändern, hinzufügt u. je eine der neuen Kräfte mit einer der parallelen Kräfte vereinigt.



Gegeben seien die zwei Punkte der Richtungslinien der beiden Kräfte P und Q, die gleichgerichtet und parallel sind. Fügt man in einer die Richtungslinien schneidenden Richtungslinie liegende entgegengesetzt gleiche Kräfte K u. K₁ hinzu, so läßt sich K₁ mit Q und K mit P jeweils zu einer Resultierenden vereinigen. Die beiden Resultierenden lassen sich in ihrem Schnittpunkte wieder zu einer Resultierenden R vereinigen. Sei beliebig.

bis einem parallelen Kräften, wiederholt sich dieses Verfahren, nötigenfalls, wenn nicht alle Kräfte in einer Ebene liegen. Beliebig gerichtete Kräfte, die im Raum zu einander beliebige Lagen haben, lassen sich im allgemeinen nicht zu einer Resultirenden vereinigen; sie lassen sich aber durch zwei Kräfte, durch ein Kräftekreuz ersetzen. Die Theorie des Kräftekreuzes wird in der Graphostatik behandelt.

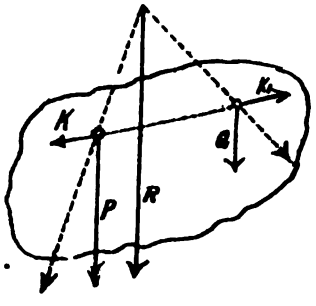
Liegen alle zu vereinigenden Kräfte in einer Ebene, so vereinigt man sie um beliebig, indem man zwei aufeinander folgende gleiche Kräfte Y_1 u. Y_2 einführt und nun Y_1 mit Y_1 zu R_1, R_1 mit Y_2 zu R_2 u.s.f. zusammensetzt. Hat man so alle Kräfte vereinigt, so setzt man deren Resultirende nun mit Y_2 zusammen und erhält dadurch die Schlussresultirende, den Polygonzug Y_1 R_1 R_2 ..... R_n Fort nun, da ein Teil von diesem Gestalt mit den



Auf Grund der oben aufgestellten Sätze lassen sich zwei Kräfte, deren Richtungslinien sich schneiden, stets zu einer Mittelkraft vereinigen.

Man verlegt den Angriffspunkt der Kräfte nach dem Schnittpunkte der Richtungslinien u. setzt die Kräfte an diesem Punkte zusammen.

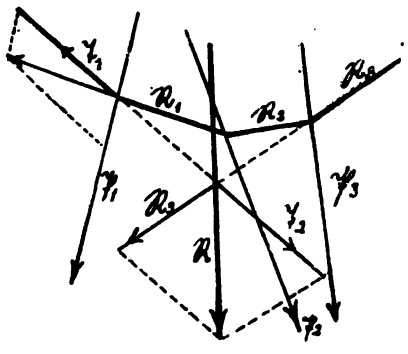
Parallele Kräfte lassen sich zusammensetzen, indem man längs einer sie schneidenden Richtungslinie zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die also nichts ändern, hinzufügt u. je eine der neuen Kräfte mit einer der parallelen Kräfte vereinigt.



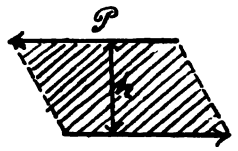
Gegeben seien die an zwei Punkten der Ky. wirkenden Kräfte P und Q, die gleichgerichtet und parallel sind. Legt man die in einer die Parallelen schneidenden Richtungslinie liegenden entgegengesetzt gleichen Kräfte K u. K₁ hinzu, so läßt sich K₁ mit Q und K mit P je zu einer Resultierenden vereinigen. Die beiden Resultierenden lassen sich in ihrem Schnittpunkte wieder zu einer Resultierenden R vereinigen. Es beliebig

bis einem parallelen Kräften, wiederholt sich dieses Verfahren, nötigenfalls, wenn nicht alle Kräfte in einer Ebene liegen. Beliebig gerichtete Kräfte, die im Raum zu einander windschief stehen, lassen sich im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; sie lassen sich aber durch zwei Kräfte, durch eine Kraftschraube ersetzen. Die Theorie der Kraftschraube wird in der Graphostatik behandelt.

Liegen alle zu vereinigenden Kräfte in einer Ebene, so vereinigt man sie am besten, indem man zwei aufeinander folgende gleiche Kräfte Y_1 u. Y_2 einführt und nun Y_1 mit P_1 zu R_1, R_1 mit P_2 zu R_2 u.s.f. zusammensetzt. Hat man so alle Kräfte vereinigt, so setzt man schon Resultierende mit Y_2 zusammen und erhält dadurch die Seitenresultierende, dann Polygon Y_1 R_1 R_2 ..... R_n fest muss, da ein Teil von demselben Gestalt mit den



Parallelogramm, dessen Fläche = Ph ist.



Da die einzige Wirkung einer Kräftegruppe in der ein Moment besteht, gefunden ist, darstellen durch seinen Momentenvektor darzustellen. Kräftegruppen welche dem gleichen Momentenvektor besitzen, nennt man äquivalent. (Es müssen also dazu die Ebenen derselben parallel, die Parallelogrammflächen gleich und der Drehsinn derselbe sein.)

Äquivalente Kräftegruppen können durch einander ersetzt werden; da, wie bewiesen, die Stellung der Kräftegruppe zum Momentenpunkt wie der Größe und Richtung des Moments nichts zu schaffen hat.

Anmerkung: Da der Momentenvektor zu einem festen Ort gebunden ist, heißt er ein fester Vektor, die Kraft dagegen, die nur auf ihrer Richtungslinie verschiebbar ist, ein linienflüchtiger Vektor.

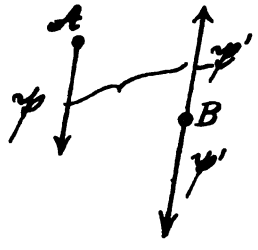
Die Gesamtwirkung mehrerer Kräftegruppen erhält man, indem man ihre Momentenvektoren geometrisch summiert.

Kräftepaare heißen gleichgerichtet, wenn die Gesamtsumme ihrer Momente = 0 ist.

Zwei Kräftepaare heißen gleichgerichtet, wenn sie in parallelen Ebenen liegen, gleiche Größe, aber entgegengesetzten Drehsinn haben.

Parallelverschiebung einer Kraft.

Um die an A wirkende Kraft P auf B zu verschieben, bringt man in B zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte an, die mit P gleich und parallel sind; dann faßt man P und -P' zu einem Kräftepaar zusammen und P' bleibt an Punkt B übrig. Hieraus der Satz: „Man kann jede Kraft parallel mit ihrer Richtungslinie auf einen beliebigen Punkt bringen, wenn man noch das Moment der ursprünglichen Kraft bezüglich des neuen Angriffspunktes fügt.“ Umgekehrt: „Jede kann man aus einer Kraft und einem Kräftepaar, dessen Ebene



parallel der Kraft ist, eine Resultierende, da keine Drehung. Schneidet die Kraft die Achse des Kräftepaares, so ist eine solche Zusammensetzung nicht möglich und es kann nur eine Kraftdrehung gebildet werden.

Gestützter starrer Körper.

Wird ein starrer Körper in einem Punkt festgehalten, so werden ihm von seinen drei Freiheitsgraden drei entzogen (nämlich die drei Möglichkeiten einer Translation), er kann sich nur noch um alle Achsen drehen. Ein Punkt des Körpers hat dann nur 3 Freiheitsgrade, da er sich nur noch auf einer Kugel (Kugelfläche) bewegen kann (Linse Teil 40). Das Gleichgewicht der Kräfte ist hier dadurch bedingt, daß die Resultierende aller äußeren Kräfte durch den Stützpunkt geht und daß der Reaktionswiderstand (Gegenkraft) das Gleichgewicht hält. Es empfiehlt sich also, den Momentensatz bezgl. des Stützpunktes anzuwenden, da dann das Moment des Stützpunktes = 0 wird, also $\Sigma V_x p = 0$.

Wird ein gerader Punkt des Körpers festgehalten, so werden seine unendlich kleinen Verschiebungen und damit auch die ganzen Körper verschiedet. Diesem bleibt so nur noch einer übrig, nämlich eine Drehung um die durch beide Punkte gehende Achse. Gleichgewichtsbedingung ist hier, daß die Resultierende der äußeren Kräfte die Achse schneide. Man wendet hier den Momentensatz bezüglich der Drehachse als Momentenachse an, damit die Auflagerpunkte wegfallen. Einen Auflagerpunkt erhält man, indem man den Momentensatz für einen Auflagerpunkt anwendet.

Wird einem dritten Punkt, der nicht auf der Verbindungslinie der beiden andern liegt, sein letzter Freiheitsgrad entzogen, so ist der Körper festgehalten; er ist durch die gegebenen äußeren Kräfte im Gleichgewicht. Einen Auflagerpunkt erhält man, indem man den Momentensatz für die Verbindungslinie der beiden andern Punkte als Achse anwendet.

Einem starren Körper muß als 6. Kräfte

parallel zur Kraft ist, eine Resultierende, da keine Drehung. Schneidet die Kraft die Ebene des Kräftepaares, so ist eine solche Zusammensetzung nicht möglich und es kann nur eine Kraftschraube gebildet werden.

Gestützter starrer Körper.

Sind an einem starren Körper ein Punkt festgehalten, so werden ihm auf seine freie Translationsgrade drei entgegen (nämlich die drehende Möglichkeit einer Translation), er kann sich um alle Achsen frei drehen. Ein Punkt des Körpers hat dann nur 3 Freiheitsgrade, da, da er sich um jede einer Ebene (Kugel) berühren kann (Euler Seite 40). Das Gleichgewicht der Kräfte ist hier dadurch bedingt, daß die Resultierende aller äußeren Kräfte durch den Ruhepunkt geht und daß der Richtungsaktion (Zusammenhang) das Gleichgewicht fällt. Es empfiehlt sich also, den Momentensatz bzgl. des Ruhepunktes anzuwenden, da dann das Moment des Ruhepunkts = 0 wird,

also $\Sigma V_r p = 0$.

Wird ein zweiter Punkt des Ringes festgehalten, so werden seine unendlich vielen Kreisbögen und damit auch der ganze Ring verschoben. Diesem Umstand so muß nur einer übrig, nämlich eine Drehung um die durch beide Punkte gehende Achse. Gleichgewichtsbedingung ist hier, daß die Resultierende der äußeren Kräfte die Achse schneide. Man wendet hier den Momentensatz bezüglich der Drehachse als Momentenachse an, damit die Auflagerkräfte herausfallen. Eine Auflagerkraft erhält man, indem man den Momentensatz für einen anderen Bezugspunkt anwendet.

Wird einem dritten Punkt, der nicht auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt, sein letzter Freiheitsgrad entzogen, so ist der Ring festgehalten; er ist durch die gezeichneten im ganzen im Gleichgewicht. Eine Auflagerkraft erhält man, indem man den Momentensatz für die Verbindungslinie der beiden anderen Punkte als Achse anwendet.

Einen starren Ring nennt man 6fach

verbindungen" vorgekommen ist im all-
gemeinen nicht möglich und es muß
zur Behandlung eines solchen „statisch un-
bestimmten Falles" die elastische Formän-
derung des Körpers in Betracht gezogen
werden.

Beim „ebenen Problem" besitzt der Kör-
per nur drei Freiheitsgrade. Sind nun
Punkt festgehalten, so ist noch eine Drehung
um diesen möglich (Lager I). Werden zwei
Punkte festgehalten so ist der ganze Körper fest
(Lager auf zwei Auflagern). Die Richtun-
gen müssen hier mittelst des Momen-
tensatzes ermittelt werden.

Der Gegensatz zu diesem „statisch be-
stimmten Problem ist der Balken auf 3
und mehr Stützen „statisch unbestimmt"
und kann nur mit Rücksicht auf die
Formänderungen behandelt werden.

Die Lehre vom Schwerpunkt.

Die singulären Punkte eines Körpers sind gewisse Massenkräften angriffen; es soll der geometrische Ort für die Resultierenden der Massenkräfte gefunden werden.

Erklärung: Massenkräfte sind solche Kräfte, welche immer proportional den Massen wirksamen d. h. jeder beliebigen Masse ein und dieselbe nach Größe und Richtung konstante Beschleunigung erteilen. Eine solche Massenkraft z. B. die Schwerkraft mit ihrer konstanten Beschleunigung $= g$.

Bezeichnet m_1 die Masse und $\mathfrak{P}_1$ die Kraft am materiellen Punkt 1 des Körpers, so liefert der Momentensatz für einen Momentenpunkt O:

Summe der Momente der singulären Kräfte = Moment der Resultierenden.

$$\Sigma [r \mathfrak{P}] = [r \mathfrak{R}] = [r \Sigma \mathfrak{P}]$$

nämlich $\mathfrak{P}_1 = m_1 k$

$\mathfrak{P}_2 = m_2 k$, wobei $k = \text{const.}$

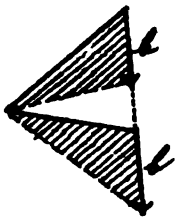
⋮ ⋮

$$\Sigma \psi = b \Sigma(m)$$

ebenso $\Sigma V r \psi = V \Sigma(m r) b$. Es ist also

$$V \Sigma(m r) b = V \delta b \Sigma(m) = V(\delta \Sigma m) . b$$

Aus dieser Gleichung folgt für die bei. den Vektoren $\Sigma(m r)$ und $\delta \Sigma m$, daß ihre Endpunkte auf einer Geraden $\parallel b$ liegen müssen, wenn man sie von einem Punkte aus aufträgt.



Eine spezielle Lösung ist $\Sigma m r = \delta \Sigma m$. diese zeichnet sich vor den übrigen dadurch aus, daß sie von b ganz unabhängig ist, d.h. die Resultierende geht immer durch den Endpunkt des Vektors δ, welche Größe und Richtung auch die Massenpunkte besitzen.

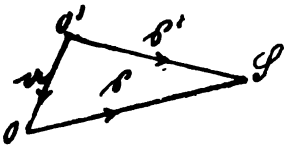
Wendet man den Momentensatz für einen andern Punkt an, der von O um die Strecke a entfernt ist, so ist

$$\Sigma(m r') = \delta' \Sigma m$$

$$\Sigma m r' = \Sigma m (r + a) = \Sigma m r + a \Sigma m =$$

$$= \delta' \Sigma m, \text{ hieraus}$$

$$\delta' = \delta + a,$$



d.h. man gelangt auch für r' zu demselben Punkt wie oben.

dieser Punkt, durch den die Resultierende paralleler Massenkräfte ständig angreift, ganz gleich in welcher Richtung, also auch wenn der Hebel des Momentangriffes geht, wird der Schwerpunkt des Körpers genannt. Er ist definiert durch die Gleichung seines Abstandes vom Momentanpunkt:

$$s = \frac{\Sigma m r}{\Sigma m} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots} \qquad (29)$$

(der Wert s heißt auch das geometrische Mittel der Abstände r).

Bezeichnet man die Gesamtmasse $m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ mit M, so ist auch Gl. (29):

$$M s = \Sigma m . r \qquad (30)$$

Wählt man den Schwerpunkt selbst zum Momentanpunkt, so folgt daraus

$$\Sigma m r = 0 \qquad (31)$$

Besteht der Körper aus einzelnen Teilen mit den Massen $M_1, M_2 \dots\dots$, so hat man

$$M s = \Sigma_1 m r + \Sigma_2 m r + \dots = M_1 s_1 + M_2 s_2 + \dots,$$

mit Worten: Man findet den Schwerpunkt des ganzen Körpers, indem man zunächst

die Massen der Teile in ihren Schwerpunkten vereinigt und daraus dann den Gesamtschwerpunkt ermittelt.

Bei zwei Teilen liegt der Schwerpunkt der Strecke auf der Verbindungslinie der Teilschwerpunkte, die Abstände verhalten sich umgekehrt wie die Massen.

Durch Projektion auf eine Ebene erhält man:

$$M b' = \Sigma m r' \qquad (28)$$

Diese Gleichung besagt, daß sich der Schwerpunkt bei der Projektion des betreffenden Gebildes mitprojiziert, wenn man die Massenverteilung in der Projektion mitberücksichtigt, d. h. wenn die Massen aller Punkte, die sich ja in einem Punkt projizieren, in diesem vereinigt gedacht werden.

Liegt eine gleichmäßig mit Masse belegte ebene Figur vor, so wird bei der Projektion auf eine Ebene die Massenverteilung wieder gleichmäßig; sie wird also ihr Mittelpunkt der Schwerpunkt mitprojiziert.

Legt man durch den Momentanpunkt ein räumliches Koordinatensystem und projiziert auf die drei Achsen, so ist, wenn x, y, z die Projektionen des r und ξ, η, ζ die Projektionen von ρ bedeuten:

$$M\xi = \Sigma m x, \quad M\eta = \Sigma m y, \quad M\zeta = \Sigma m z \tag{32a}$$

die Momente $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ können auch als Abstände der betreffenden Punkte von den für X resp. Y od. Z Achse parallelen Ebenen aufgefaßt werden.

Für jede beliebige Ebene gilt, wenn s und s parallele Abstände von derselben bedeuten:

$$M s = \Sigma m x. \tag{33.}$$

Geht die Ebene durch den Schwerpunkt, so ist

$$s = 0 \quad \text{und daher}$$

$$\Sigma m x = 0 \tag{34.}$$

Für eben solche Gebilde gelten die Gleichungen (33) und (34) eben so gut, wenn man nur die x und s als parallele Abstände von einer in der Ebene liegenden Parallelen auffaßt. Jede Gerade durch den Schwerpunkt, für die also $\Sigma m x = 0$ ist, wird Schwerlinie genannt

Schwerpunkt einer Linie.

Von einem Körper ist man berechtigt zu sprechen, wenn man sich die Linie gleichmäßig mit Masse belegt denkt, so daß also auf die Längeneinheit immer gleichviel Masse kommt.

Der Schwerpunkt einer Geraden fällt mit dem Halbierungspunkt zusammen. Bei Kurven kommen zwei Methoden in Betracht.

1.) Graphische Lösung. Ist die Kurve graphisch gegeben so teile man sie in einige Abschnitt gleicher Teile (dann ist m konst.) und gehe von einem beliebig gewählten Punkt O Radienvektoren (r) nach den Mittelpunkten der Teilstrecken. Dann bilde man die geometrische Summe der Radienvektoren und teile die. selbe durch die Anzahl der Strecken; n; trägt man den so erhaltenen Vektor (s) von O nach ab, so erhält man den Schwerpunkt der Kurve. (Figur siehe nächste Seite.)

Es ist nämlich

$$s = \frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = \frac{m\Sigma r}{nm} = \frac{\Sigma r}{n}$$

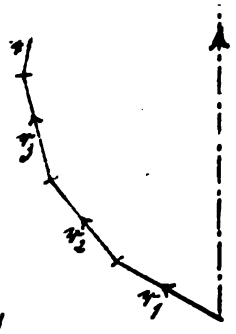
man konstruiert wäre.

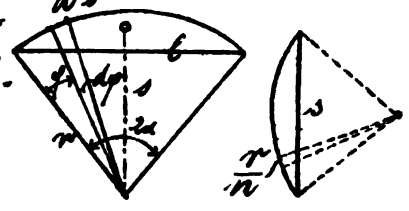
Man kann auf diese Art, indem man jeden Radiusvektor im Verhältnis $1:n$ verkleinert:

$$\sigma = \Sigma\left(\frac{r}{n}\right)$$

Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Verfährt man für vorstehende Konstruktion, genauer, wenn man den Kreismittelpunkt als Drehungspunkt der Konstruktion einmal beide Figuren nacheinander. Es ist $n \cdot d\varphi = 2\alpha$.





Hieraus

$$\frac{r}{n} = \frac{r\,d\varphi}{2\alpha}$$ Wegen der Ähnlichkeit ist

$$\frac{r}{n} : s = ds : l \text{ oder}$$

$$\frac{r\,d\varphi}{2\alpha} : s = r\,d\varphi : l, \text{ hieraus}$$

$$s = \frac{l}{2\alpha} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}.$$

Die Richtung von σ halbiert den ganzen Winkel 2α.

2. Analytische Lösung:

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \qquad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m} \qquad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Schreibt die Masse pro Längeneinheit, so ist $m = \mu ds$, und

$$\xi = \frac{\int \mu ds x}{\int \mu ds} = \frac{\int x ds}{\int ds}$$

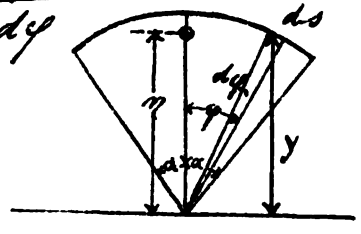
Ebenso η u. ξ. Die neuen Koordinaten ξ u. η. Ist $y = f(x)$ so kann man für ds schreiben $ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, dann ist

$$\xi = \frac{\int x\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad \eta = \frac{\int y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Die Integrale sind über das betreffende Kurvenstück zu erstrecken.

Schwerpunkt des Kreisbogens. Hier lässt sich ds einfacher durch $r\,d\varphi$ ausdrücken.

$$\eta = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\cos\varphi \cdot r\, d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\, d\varphi}$$



$$\eta = \frac{2r^2 \sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

Schwerpunkt von Flächen.

Hat eine Figur eine Symmetrieachse, so liegt der Schwerpunkt auf ihr: „Jede Symmetrieachse ist eine Schwerlinie." Sind zwei oder mehr Symmetrieachsen vorhanden, so ist ihr Schnittpunkt der Schwerpunkt der Figur. Dies alles gilt auch für punktsymmetrische Figuren.

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt der Diagonalen, der eine Diagonale der Schnittpunkt der Mittellinien, die einander im Verhältnis 1:2 teilen. Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie ist demnach ein Drittel der zugehörigen Höhe.

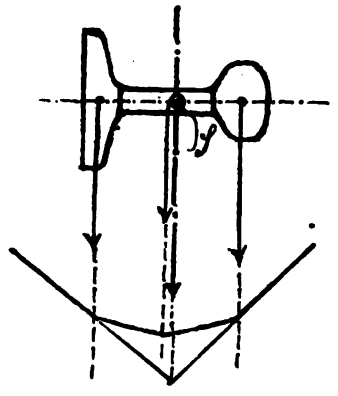
Polygone werden durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt; aus den Teilschwerpunkten gelangt man zum Gesamtschwerpunkt durch Konstruktion von 2 Schwerlinien einer Figur.

Für krummlinig begrenzte Figuren gibt es auch zwei Methoden:

1.) das graphische Verfahren.

Man zerlege den Körper

gestützt in Punkte, deren für diese die Schwerpunkte und Kraftlinien für die einzelnen angreifenden Teilgewichte die Resultierende (um beiden mit Teilgewichten, worüber Klarheit in der Graphostatik).



2.) Analytisches Verfahren.

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \qquad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$$

Ist die Masse der Flächeneinheit $= \mu$, so ist

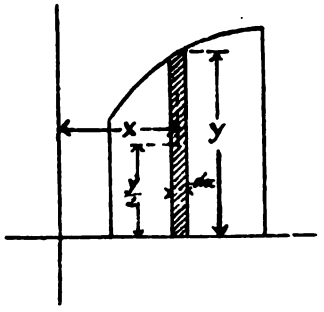
$$m = \mu dF \qquad \text{dann ist}$$

$$\xi = \frac{\int x \mu dF}{\int \mu dF} = \frac{\int x dF}{\int dF} \; ; \; \eta = \frac{\int y dF}{\int dF}$$

Ist die Begrenzung des Flächenstücks durch die Kurve $y = f(x)$ gegeben, und wird als Flächenelement ein Rechteck mit den Seiten y und dx genommen, dann ist

$$dF = y dx \quad \text{und}$$

die Abstände der Schwerpunkte von

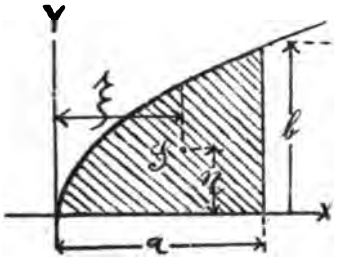


dF sind x und $\frac{y}{2}$. Es ist also

$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} \quad , \quad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}$$

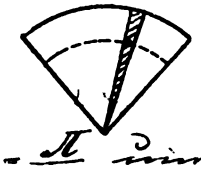
In dieser Weise erhält man für untenstehenden Parabelabschnitt $(ay^2 = bx^2)$

$$\xi = \frac{3}{5}a \quad \eta = \frac{3}{8}b$$



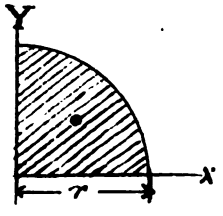
Beim Kreisbogen sieht die spezielle Aufgabe zum Ziel: man wähle als Flächenelement einen unendlich kleinen Sektor. Dessen Schwerpunkt hat vom Mittelpunkt den Abstand $\frac{2}{3}r$. Alle Schwerpunkte liegen auf einem Kreisbogen mit diesem Radius, dessen Schwerpunkt beim Zentriwinkel 2α vom Mittelpunkt den $\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ absteht, also

$$s = \frac{2r\sin\alpha}{\alpha}.$$



Für die Halbkreisfläche ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und

$$s = \frac{4r}{3\pi}$$

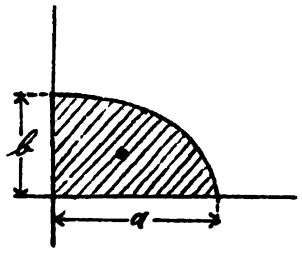


Für den Viertelkreis ist

$$\xi = \eta = \frac{4r}{3\pi}$$

Hieraus erhält man durch Projektion für den Kreissektor

80.



$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}$$

Schwerpunkt von Körpern.

Besitzt ein Körper eine Symmetrie-ebene oder eine Symmetrieachse, so ist der Schwerpunkt in ihr enthalten; 3 Symmetrie-ebenen oder eine Symmetrie-ebene und eine Rotationsachse bestimmen den Schwerpunkt als Schnitt.

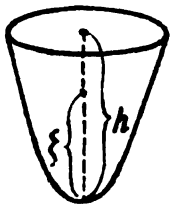
Desgleichen gilt auch von der schwerpunktlichen Symmetrie. Bei einem von parallelen Grund- und Deckflächen abgeschlossenen Prisma oder Cylinder ist der Halbierungspunkt der Verbindungslinie der Schwerpunkte dieser Flächen der Schwerpunkt, bei einer Pyramide (und einem Kegel) ist der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche, und zwar im Abstand von $\frac{1}{4}$ der ganzen Länge von der Grundfläche entfernt.

Für krummflächig begrenzte Körper erhält man, wenn die Oberfläche durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$ gegeben ist

$$\xi = \frac{\int\int xz\,dx\,dy}{\int\int z\,dx\,dy}\,; \qquad \eta = \frac{\int\int yz\,dx\,dy}{\int\int z\,dx\,dy}$$

$$\xi = \frac{\int\int \frac{x^2}{2}\,dx\,dy}{\int\int z\,dx\,dy}$$



Beim Rotationsparaboloid ist

$$\underline{\xi = \frac{2}{3}h}$$

Guldinsche Regel.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge derjenigen Seite der Kette gelegenen Seite der Massenpunkte und dem Weg der Schwerpunkte derselben.

Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Fläche einer Seite der Kette gelegenen Massenpunkte und dem Weg ihrer Schwerpunkte.

Beweis: Ein Kurvenelement ds im Abstand r von der Achse erzeugt bei der Rotation die Fläche

$$dF = ds \cdot 2\pi r; \text{ hieraus}$$

$$\Sigma dF = \Sigma (ds \cdot 2\pi r) \text{ oder}$$

$$F = 2\pi \Sigma r\,ds$$

Bezeichnet r_0 den Radius des Schwerpunkts

der Kurve p ist

$$\Sigma r\,ds = r_0 \cdot s, \text{ also}$$

$$F = 2\pi r_0 \cdot s,$$ womit der Satz für den ersten Teil erbracht ist; der für den zweiten Teil ist vollständig analog.

Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht.

Ein ruhender von der Schwerkraft angegriffener Körper, der durch irgend einen Mechanismus gestützt wird, bleibt in Ruhe, wenn die Tangente an den Weg seines Schwerpunkts an der betreffenden Stelle horizontal ist. (Von Reibungsanfall zunächst abgesehen werden.) Sind alle benachbarten Lagen des Schwerpunkts höher, so wird der Körper bei einer kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage in diese zurückkehren, resp. um dieselbe pendeln. Dieser Zustand heißt <u>stabiles Gleichgewicht</u>. Fällt aber der Körper bei der geringsten Verrückung aus der Gleichgewichtslage sich immer mehr zu entfernen, so heißt das Gleichgewicht <u>labil</u>.

Indifferent wird es genannt, wenn der Körper auf der Verrückung wieder im Gleichgewicht ist. Die Untersuchung über die Art des Gleichgewichts wird folgendermaßen geführt: Man nennt den Höhenunterschied zwischen der Gleichgewichtslage und einer unendlich benachbarten (es muß hierbei auf kleine Größen zweiter Ordnung eingegangen werden, da die erster Ordnung wegen der Bedingung der horizontalen Schwerpunkte = 0 sind). Je nachdem sich der benachbarte Punkt höher oder tiefer oder gleichhoch wie der Gleichgewichtspunkt befindet, ist das Gleichgewicht stabil, labil oder indifferent.

Der Typus der Schwerpunktskurve ist beim stabilen Gleichgewicht eine nach oben, beim labilen eine nach unten gekrümmte Parabel, beim indifferenten eine horizontale Gerade oder eine höhere Parabel (meist 4. Ordnung).

I., stabil — $y = \frac{x^2}{2a}$

II., labil — $y = \frac{-x^2}{2a}$

III., indifferent — a) $y = 0$; b) $y = \frac{x^4}{4a^3}$; c) $y = \frac{-x^4}{4a^3}$

ad I. Schwingungszeit $t = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

ad II. Fallzeit $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \log nat \frac{x_2}{x_1}$

ad III c Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2a}{g}}\left(\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}\right)$

Die Formeln für die Fallzeiten haben folgenden Sinn: der Körper fällt aus der Gleichgewichtslage aus zu rollen beginnen und die Orte x_1 und x_2 sollen auch bei der Gleichgewichtslage sein; dann ist die Zeit t diejenige, welche zwischen dem Passieren der Punkte x_1 und x_2 verfließt. Diese ganze Betrachtung wurde eingeschaltet, um den Unterschied zwischen dem labilen und dem dritten Fall der indifferenten Gleichgewichtslage zu zeigen. Für diesen Zweck sei ein Zahlenbeispiel durchgerechnet:

$a = 1\,m \qquad x_1 = 0{,}0001\,m \qquad x_2 = 0{,}1\,m$

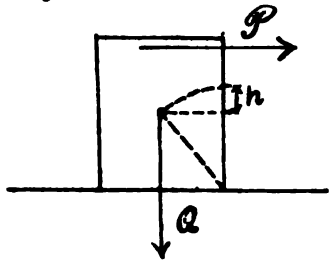
labil: $t_1 = \sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \log nat\, 1000 = 0{,}3194 \cdot 6{,}908 = \underline{2{,}2\,sec.}$

indiff: $t_2 = \sqrt{\frac{2}{9{,}81}}(10000 - 10) = 0{,}452 \cdot 9990 = 4515^{sec}$

$= \underline{1^h\,15^m\,15^{sec}}$

Der diese Verschiedenheit der Fallzeiten ist der fundamentale Unterschied beider Fälle zu suchen. —

für in unserem Fußpunkt die tiefer, als der Schwerpunkt liegen / unterstützter Körper ist stabil gelagert, wenn sich der Schwerpunkt innerhalb des äußeren Umrisses der Stützpunkte projiziert. die den Umriß einhüllenden Geraden werden Kippkanten genannt.



Als Maß der Stabilität dient das statische Moment des Körpergewichts bezogen auf die Kippkante. Es wird Stabilitätsmoment genannt und muß von dem Moment der Kraft P überwunden werden, wenn der Körper umgeworfen werden soll. die zur Überführung in eine labile Gleichgewichtslage erforderliche Arbeit heißt dynamisches Stabilitätsmoment, der Wert derselben ist Q.h, wenn h die Höhe ist, um die der Schwerpunkt gehoben werden muß.

Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Differenziert man Gl. (30). $M r_0 = \Sigma . m r$, nach der Zeit, so erhält man

$$M \frac{dr_0}{dt} = \Sigma . m \frac{dr}{dt},$$

oder wenn man die Geschwindigkeit des Schwerpunkts mit v_0, die eines Massenpunktes m mit v bezeichnet

$$M v_0 = \Sigma m v \qquad (37.)$$

Das Produkt mv stellt die Bewegungsgröße eines Punktes dar (Vergl. Satz 7.) die Gleichung besagt also, daß die Bewegungsgröße eines Körpers dieselbe ist, als wenn seine ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre.

Durch nochmalige Differentiation von Gl. (37.) und Anwendung auf Gl. (36) erhält man

$$M \frac{dv_0}{dt} = \Sigma m \frac{dv}{dt} = \Sigma (\mathfrak{P} + \mathfrak{J}),$$

da aber nach dem Prinzip der Aktion und Reaktion $\Sigma \mathfrak{J} = 0$ (S. 55) so ist

$$M \frac{dv_0}{dt} = \Sigma \mathfrak{P} \qquad (38.)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der dynamischen Grundgleichung (3), so kommt man zu dem Satz:

„Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich immer so, wie wenn auf ihn die gesamte Masse des Körpers,

sowie die Angriffspunkte aller äußeren Kräfte endlich waren."

Dieser Satz gilt nicht nur für starre Körper, sondern ebenso gut für elastische, sowie auch für beliebige Systeme von beweglich gegeneinander angeordneten Punkten (z. B. Planetensystem). Der Unterschied besteht nur darin, daß der Schwerpunkt bei diesen Gebilden keine feste Lage gegen die andern Punkte einnimmt, sondern der jeweiligen Konfiguration entsprechend seine Stellung verändert.

Lebendige Kraft eines starren Körpers.

Da die lebendige Kraft eines materiellen Punktes ($= \frac{mv^2}{2}$, p. 18) eine skalare, stets positive Größe ist, kann die lebendige Kraft eines Körpers durch einfache Summation gefunden werden.

$$L = \frac{1}{2} \sum m v^2$$

Für den starren Körper läßt sich nach Gl. (23) schreiben: $v = v_0 + [\omega r]$ und

$$L = \frac{1}{2} \sum m (v_0 + [\omega r])^2 = \frac{1}{2} \sum m v_0^2 + \sum m v_0 [\omega r] + \frac{1}{2} \sum m ([\omega r])^2$$

Da der Schwerpunkt einer Kathode gleichen

Geschwindigkeit seines Schwerpunkts ist, kann man für $(\sqrt{v_0^2 + x})^2$ auch $(v_0 y)^2$ schreiben, wenn y den Abstand der Massenteilchen von der Drehachse bezeichnet.

Es ist also

$$L = \frac{1}{2} v_0^2 \Sigma m + v_0 \Sigma \sqrt{v_0^2 (m x)} + \frac{1}{2} \Sigma m (v_0^2 y^2)$$
$$= \frac{1}{2} M v_0^2 + v_0 \sqrt{v_0^2} (\Sigma m x) + \frac{1}{2} v_0^2 \Sigma m y^2.$$

Wird als Ausgangspunkt der Rechnung der Schwerpunkt genommen (ist v_0 die Geschw. des Schwerpunkts und sind die x vom Schwerpunkt aus gerechnet), so fällt das gemischte Glied fort, da $\Sigma m x = 0$ (Gl. 31.)

Der Ausdruck $\Sigma m y^2$ im dritten Glied ist von der Größe der Winkelgeschwindigkeit nicht abhängig, wohl aber von der Richtung der Drehachse; man nennt diesen Wert das Trägheitsmoment des Körpers für die betreffende Drehachse und bezeichnet ihn mit Θ. Damit wird schließlich:

$$L = L_0 + \frac{1}{2} v^2 \Theta \qquad (39)$$

wobei nun $L_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$ als die lebendige Kraft der Translation und $\frac{1}{2} v^2 \Theta$ als die lebendige Kraft der Rotation bezeichnet. Die Lagerungsenergie zerfällt also genau so wie die Lagerung selbst in zwei

gemeinsamen aus einander und
jüngige Teile, in die Translationsen-
ergie und in die Rotationsenergie.

Anmerkung: Unter dem Trägheits-
moment eines Körpers bezüglich einer
Achse versteht man also die über den ganz-
en Körper ausgedehnte Summe sämtlich-
er Produkte, in denen jedes Massenteilchen
mit dem Quadrat seines Abstandes von
der Drehachse multipliziert ist. Das Träg-
heitsmoment kann nur aufgefaßt wer-
den als diejenige Masse, die in der
Entfernung 1 von der Achse angebracht
werden müßte, um dieselbe Rotat-
ionsenergie hervorzubringen, welche
der Körper besitzt. (Es ist also die auf der
Entfernung 1 reduzierte Masse).

Das Trägheitsradius (ϱ) ist definiert
durch die Gleichung:

$$\Theta = M \cdot \varrho$$

Es ist also die Entfernung, in der
konzentriert die Masse des Körpers die gleich-
e Rotationsenergie liefern würde.

Das Trägheitsmoment des ganz-
en Körpers ist gleich der Summe der Trägheits-

momente der einzelnen Teile.

Das Trägheitsmoment eines ebenen Gebildes kann nie negativ oder gebrochen sein, ja manchmal die Bedingung in der betrachteten Ebene liegt oder senkrechte Lage stark. Näheres über Trägheitsmomente der Flächen wird in der Festigkeitslehre, näheres über Trägheitsmomente von Körpern in der Dynamik behandelt.

Über die letzteren mögen an dieser Ort einige Bemerkungen genügen.

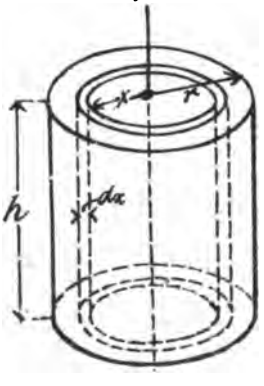
Ist ein Massenelement $m = \mu\, dx\,dy\,dz$, so ist das Trägheitsmoment bezüglich der z Achse:

$$\Theta_z = \iiint \mu\, dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2),$$

ist für die Oberfläche des Körpers $z = f(x,y)$ gegeben, so ist

$$\Theta_z = \mu \iint f(x,y)(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Trägheitsmoment eines <u>Cylinders</u> bezüglich seiner geometrischen Achse.



Alle auf einem Cylinder vom Radius x und der Wandstärke dx gelegenen Massenteilchen haben den

selben Abstand x von der Achse.

Nimmt man einen solchen Hohlzylinder als Massenelement, so setzt man für das Trägheitsmoment das einfache Integral

$$\Theta = \mu \int_0^r 2\pi x\,dx \cdot h \cdot x^2 = 2\pi h \mu \int_0^r x^3 dx = 2\pi h \mu \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$\Theta = \frac{\mu \pi r^4 h}{2}$$

Schließlich man den Wert der Masse des Zylinders $M = \mu \pi r^2 h$, so ist

$$\Theta = \frac{M r^2}{2} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Die Theorie der allgemeinen Bewegung des freien Körpers wird in der Dynamik gegeben. Hier kann nur die

<u>Zwangläufige Rotation um eine feste Achse</u>

behandelt werden. Das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse sei Θ (für einen Punkt, da die Achse unveränderlich ist).

Translationsenergie ist hier nicht vorhanden. Die lebendige Kraft ist also hier:

$$L = \frac{1}{2} u^2 \Theta \qquad (40).$$

An dem Körper wirke eine Kraft $\mathfrak{P}$.

Man zerlegt dieselbe in drei parallele Komponenten, eine parallel zur Drehachse des Körpers, eine die Achse senkrecht schneidend.

und Ende in eine dritte punktweise zu bringen suchen. Die beiden ersten leisten bei einer Rotation keine Arbeit; die der letzteren P' ist für das Zeitelement $dt = P'.p.u\,dt$ (p ist der punktweise Abstand zwischen P' und der Achse). Setzt man dies gleich dL (nach Gl. 5), oder $= u\,du\,\Theta$ (Gl. 40 differenziert), so erhält sich

$$P'p\,u\,dt = u\,du\,\Theta \quad \text{und}$$

$$P'p = \Theta \frac{du}{dt} \qquad (41).$$

Der Faktor $P'p$ ist das statische Moment von P bezüglich der Achse.

Gl. (41). enthält bei der Rotation eine ganz fasse die dynamische Grundgleichung.

Translation	Rotation
Kraft = Masse × Beschleunigung	Drehmoment = Trägheitsmom. × Winkelbeschleun.
$P = m \times \frac{dv}{dt}$	$P'p = \Theta \frac{du}{dt}$
$L = m \frac{v^2}{2}$	$L = \Theta \frac{u^2}{2}$

Der Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine.

Der Zweck der Kurbelmechanismus ist entweder, eine durch wechselnde Drücke einer „Arbeitsflüssigkeit" (Dampf, Gas, Druckwasser u. s. w.) erzeugte hin- und hergehende („oscillirende") Bewegung in eine rotirende zu verwandeln oder umgekehrt eine rotirende Bewegung in eine oscillirende umzusetzen, wie z. B. beim Bogenspatter, wo für fast nur die erste Hälfte einer Drehung benutzt werden, die Behandlung der zweiten Hälfte etwas umständlich ist.

Die Bewegung ist eine gesetzmäßige. Ist die Abhängigkeit der Bewegung eines einzigen Punktes von der Zeit gegeben, so ist dadurch die ganze Bewegung festgelegt.

Um zu einfachen Resultaten zu gelangen, sei zunächst von der in der Praxis, wo die Gleitflächen der Kreuzkopfführung wie der verschiedenen Zapfen unvermeidlichen Reibungen abgesehen; sowie wir die zu

sind und in eine dritte punktweise zu beiden addiren. die beiden ersten leisten bei einer Rotation keine Arbeit; die der letzteren P' ist für das Zeitelement $dt = P'.p.u\,dt$ (p ist der punktweise Abstand zwischen P und der Rotationsaxe). Setzt man diese gleich dL (nach Gl. 5) oder $= u\,du\,\Theta$ (Gl. 40 differenziirt), so wird gefordert $P'.p.u\,dt = u\,du\,\Theta$ und

$$P'p = \Theta \frac{du}{dt} \qquad (41).$$

Der Factor $P'p$ ist das statische Moment von P bezüglich der Rotationsaxe.

Gl. (41). enthält bei der Rotation eine feste Axe die dynamische Grundgleichung.

Translation	Rotation
Kraft = Masse × Beschleunigung	Drehmoment = Trägheitsmom. × Winkelbeschleun.
$P = m \times \frac{dv}{dt}$	$P'p = \Theta \frac{du}{dt}$
$L = m \frac{v^2}{2}$	$L = \Theta \frac{u^2}{2}$

Der Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine.

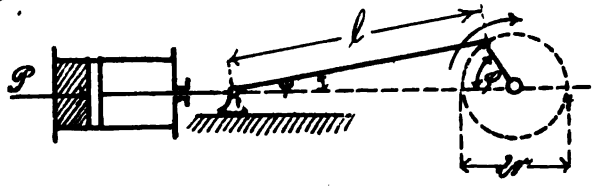
Der Zweck der Kurbelmechanismus ist entweder, eine durch wechselnde Drücke einer „Arbeitsflüssigkeit" (Dampf, Gas, Druckwasser u. s. w.) erzeugte hin- und hergehende („oscillirende") Bewegung in eine rotirende zu verwandeln oder umgekehrt eine rotirende Bewegung in eine oscillirende umzusetzen, wie z. B. beim Tiegelgatter; für den Fall nur die verschiedenen Stellungen bestimmt werden, die Behandlung der gewählten Stellung wäre nun.

Die Bewegung ist eine zwangläufige. Ist die Abhängigkeit der Bewegung einer einzigen Punktes von der Zeit gegeben, so ist dadurch die ganze Bewegung festgelegt.

Um zu einfachen Resultaten zu gelangen, sei zunächst von der in der Reibung, an den Gleitflächen der Kreuzkopfe und an den verschiedenen Zapfen auftretenden Biegungen abgesehen; ferner mögen die zu

zusätzlichen Beschleunigung oder Verzögerung der oscillierenden Massen nötigen Kräfte (Beschleunigungsdruck, Massendruck) unberücksichtigt bleiben, endlich soll die Lenkung des Kurbelgetriebes [illegible] die Belastungsschwankungen [illegible] werden.

Zu dieser Vernachlässigung gelangt man, indem man statt $l \cos\varphi$ setzt l, was bei der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{r}{l}$ (gewöhnlich $\geq \frac{1}{6}$) berechtigt erscheint. Bei der genauen Vernachlässigung wird $\frac{r}{l} = 0$ gesetzt, man spricht daher auch von der Annahme der „unendlichlangen Stange".



Um die an der Maschine angebrachte Kraftmaschine ins Gang zu erhalten, ist im Beharrungszustand für jede Drehung $d\varphi$ der gleichen Lehre zu Arbeitsleistung erforderlich, die gleichzeitig zum Überwinden der geleisteten Arbeit verwendet wird oder mit der Größe

des Winkels φ; es ist also die Arbeitslieferung eine ungleichförmige (in den Totpunktlagen, bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 180°$ ist sie Null). Bei einer einzylindrigen, doppeltwirkenden Maschine unterscheidet man innerhalb eines Umlaufs eine Periode, genau der Maschinleistung u. genau der Minderleistung. In der Maschinleistungsperiode wird die Überschußarbeit als kinetische Energie in Schwungrad und Maschine aufgespeichert, in der Minderleistungsperiode dagegen an Schwungrad und Maschine wieder abgegeben. Die Gesamtarbeit eines Umlaufs muß für den Beharrungszustand gleich der in konstanter Größe abgegebenen sein. Bei Behandlung der vorliegenden Probleme sind es vor allem folgende drei Fragen, deren Beantwortung am Platze ist:

1.) Welche Kurbelstellungen begrenzen die Grenzen zwischen der Maschin- und Minderleistungsperiode?

2.) Wie viel wird in der Maschinleistungsperiode mehr (resp. in der Minderleistungsperiode weniger) geleistet, als dem Durchschnittswert entspricht?

3.) Welche Beziehungen bestehen zwischen der Größe des Schwungrads und der Ungleichförmigkeit des Ganges der Maschine?

Die Berechnung werde hier für den einfachen Fall durchgeführt, daß die Maschine mit voller Füllung arbeitet. Der Kolbendruck P ist dann konstant und wechselt nur seine der Hübe immer seine Richtung. Bei einer Drehung dφ ist die vom Kolbendruck verrichtete Arbeit

$Pr\,d\varphi \sin\varphi$ (die Zusammenstöße bei Beginn der Arbeit sind selten dabei hier fort).

Die Gesamtarbeit eines Hubes ist $P \cdot 2r$, die Durchschnittsarbeit für die Drehung dφ $= \frac{2\,Pr\,d\varphi}{\pi}$. Setzt man beide Werte gleich, so erhält man den Winkel φ, wo die Kolbenarbeit gerade der Durchschnittsarbeit gleich ist und wo der Minderleistung die Mehrleistung übergeht. Es ist also

$$Pr\,d\varphi \sin\varphi' = 2\,\frac{Pr\,d\varphi}{\pi}$$

$$\sin\varphi' = \frac{2}{\pi},\quad \varphi' = 0{,}690 = 39°\,32'$$

Für zweiten Winkel $\varphi'' = \pi - \varphi' = 140°\,28'$ beginnt der Eintritt der zweiten Minderleistungsperiode.

In der Mehrleistungsperiode bringt

der Umgebung die Arbeit $\int_{\varphi}^{\varphi_2} Pr\,dy \sin\varphi = 2Pr\cos\varphi$
$= 0{,}771 \cdot 2Pr$ [illegible]. Die durchschnittliche
Arbeit für diese Periode ist $\frac{2}{\pi} Pr(\varphi_2 - \varphi) = 0{,}561 \cdot 2Pr$
der Gesamtüberschuß der Maschinenperiode
ist $(0{,}771 - 0{,}561)2Pr = 0{,}210 \cdot 2Pr = 0{,}42\,Pr$.

Für ein anderes Umfangsverteilungsgesetz (Sinusform) oder bei Berücksichtigung der Massendrücke ändert sich dieser Betrag, der darum jetzt allgemeiner mit A bezeichnet werden soll.

Berechnung des Schwungrades.

Der Arbeitsüberschuß A wird, wie bereits ausgeführt, in Form von kinetischer Energie im Schwungrad aufgespeichert. Bezeichnet u_{max} die maximale und u_{min} die Minimal-Winkelgeschwindigkeit und ferner Θ das Trägheitsmoment des Schwungrades, so ist nach Gl. 40.

$$\frac{1}{2}\Theta(u^2_{max} - u^2_{min}) = A \qquad (43)$$

Definiert man noch mit der Gleichung

$$\delta = \frac{u_{max} - u_{min}}{u}, \qquad (44)$$

worin u den Durchschnittswert der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, den Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine, so geht Gl. (43) mit

3.) Welche Beziehungen bestehen zwischen der Größe der Schwungmasse und der Ungleichförmigkeit des Ganges der Maschine?

Die Lösung wurde hier für den einfachen Fall durchgeführt, daß die Maschine mit voller Füllung arbeitet. Der Kolbendruck P ist dann konstant und es fällt nur für die Leistung der Hub ins Gewicht. Bei einer Drehung dφ ist die vom Kolbendruck verrichtete Arbeit

$P r dφ \sin φ$ (die Zugspannkräfte leisten keine Arbeit und fallen deshalb hier fort).

Die Gesamtarbeit eines Hubes ist $P \cdot 2r$, die Durchschnittsarbeit für die Drehung dφ $= \frac{2 P r . dφ}{π}$. Setzt man beide Werte gleich, so erhält man den Winkel φ', wo die Kolbenarbeit gerade der Durchschnittsarbeit gleich und wo der Mindestleistung in die Maximalleistung übergeht. Es ist also

$$P r dφ \sin φ' = 2 \frac{P r dφ}{π}$$

$$\sin φ' = \frac{2}{π}, \quad φ' = 0{,}690 = 39° 32'$$

Für größere Winkel $φ'' = π - φ' = 140° 28'$ begrenzt der Eintritt der größten Mindestleistungsperiode.

Für die Maximalleistungsperiode bringt

der Umgebung die Arbeit $\int_0^{\varphi} P r dy \sin\varphi = 2 P r \cos\varphi$
$= 0{,}771 \cdot 2Pr$ fordert. Die durchschnittliche
Arbeit für diese Periode ist $\frac{2}{\pi} Pr(\varphi - \varphi) = 0{,}561 \cdot 2Pr$
der Gesamtüberschuß der Abstoßungsperiode
ist $(0{,}771 - 0{,}561) 2Pr = 0{,}210 \cdot 2Pr = 0{,}42 Pr$.

Für ein anderes Umgebungsgesetz (Expansion) aber bei Berücksichtigung der Massendrücker ändert sich dieser Betrag, der darum jetzt allgemeiner mit A bezeichnet werden soll.

Berechnung des Schwingungsmaßes.

Der Arbeitsüberschuß A wird, wie bereits ausgeführt, in Form von kinetischer Energie im Schwingungsmaß aufgespeichert. Bezeichnet u_{max} die maximale und u_{min} die Minimal-Winkelgeschwindigkeit und ferner Θ das Trägheitsmoment des Schwingungsmaßes, so ist nach Gl. 40.

$$\frac{1}{2} \Theta (u^2_{max} - u^2_{min}) = A \qquad (43)$$

definiert man nun mit der Gleichung

$$\delta = \frac{u_{max} - u_{min}}{u}, \qquad (44)$$

worin u den Durchschnittswert der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, den Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine, so geht Gl. (43) mit

Berücksichtigt man, daß

$$\frac{1}{2}\left(u_{max}^2 - u_{min}^2\right) = \frac{u_{max}+u_{min}}{2}\left(u_{max}-u_{min}\right) = u \cdot \gamma u \text{ ist,}$$

aber in

$$\underline{\gamma u^2 \theta = A} \qquad (45)$$

Ist eine bestimmte Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine verlangt, so kann aus Gl (45) das erforderliche Trägheitsmoment der Schwungmasse gefunden werden. Die in der Praxis gebräuchlich vorkommenden Werte von γ schwanken je nach dem Zweck der Anlage zwischen $\frac{1}{25}$ und $\frac{1}{100}$.

Berücksichtigung der Massendrücke.

Wenn man von der eigentümlichen Lenkung der Schubstange absieht, so ist die Bewegung der Gestänge eine geradlinig hin- und hergehende. Unter Vernachlässigung einer endlich langen Schubstange, und wenn die kleinen Abweichungen der Winkelgeschwindigkeit nicht berücksichtigt werden, ist die Lenkung eine harmonische Schwingung.

Bezeichnet x die Entfernung aus der Mittellage, so ist

$$x = r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -r\cos\varphi, \text{ und da } \varphi = \omega t,$$

$$x = -r\cos\omega t \text{ und } \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 r\cos\omega t = -\omega^2 x$$

der Massenpunkt ist also $P = -M\omega^2 x$, wenn M die Gesamtmasse des Systems bezeichnet.

Es hat seinen größten Wert ($= \pm M\omega^2 r$) in den Totpunktlagen, in der Mittellage ist er $= 0$. In der ersten Hälfte der Schwingung ist er Arbeit und gilt für in der zweiten wie der für.

Reibung.

Berühren sich zwei Körper in einer Fläche, so tritt bei einer relativen Lageveränderung, wenn während derselben die Berührung fortdauert, ein Widerstand auf, welcher immer der Bewegung entgegengerichtet. Man nennt ihn „Reibung".

Anmerkung: An einem bewegliche System (einem Maschinensystem) unterscheidet man nach der Wirkung der Kräfte drei Arten derselben: active, durch welche Arbeitsmengen übertragen werden, neutrale, die keine Arbeit leisten (Zwangskräfte) und endlich passive, welche Arbeitsmengen entziehen, also den Systembewegungen wesentlich hinderlich sind. Die Reibung tritt in der Regel als passiver Widerstand auf,

nur in einzelnen Fällen (z. B. beim Lokomotivantrieb, bei Riemen- und Seilscheiben, Reibungskupplungen) tritt sie als aktive Kraft auf.

Je nach der Art der Lageänderung unterscheidet man drei Arten von Reibung:

1. die gleitende Reibung, oder Reibung in engerem Sinn, wenn sich die Körper längs der Berührungsfläche gegen einander verschieben;

2. die rollende oder wälzende Reibung, wenn sich die beiden Oberflächen an einander abwälzen, ohne zu gleiten; endlich

3. die bohrende Reibung, wenn die Lageänderung in einer Rotation um einen Punkt der Berührungsfläche besteht. Die bohrende Reibung läßt sich auf die gleitende zurückführen und wird deshalb füglich als spezieller Fall derselben angesehen.

Gleitende Reibung.

Gegenüber N die normal zur Berührungsfläche wirkende Kraft, der „Normaldruck", F (Friktion) der Reibungswiderstand, so ist nach Morin

$$F = \mu N. \qquad (46).$$

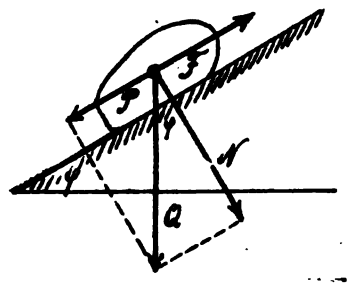
die Größe f heißt Reibungskoefficient und ist abhängig vom Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der reibenden Körper. Mit einer für die Technik genügenden Genauigkeit kann er für ein und dasselbe Material bei derselben Oberflächenbeschaffenheit unabhängig von der Geschwindigkeit konstant gesetzt werden. Genauere Untersuchungen zeigen indeß, daß der Reibungscoefficient der Ruhe bei den meisten Materialien etwas größer ist als der der Bewegung und daß er bei sehr großen Geschwindigkeiten noch weiter abnimmt.

Von der Größe der reibenden Flächen ist der Reibungswiderstand nicht abhängig (da z. B. bei einer kleineren Fläche die Pressung auf die Flächeneinheit gerade soviel mal größer ist, als die Gesammtfläche kleiner ist).

Die Richtung des Reibungswiderstandes fällt in die Tangentialebene der berührenden Flächen und ist immer einer wirklich vorhandenen oder angestrebten Bewegung entgegen.

Liegt ein Körper auf einer schiefen

kann, dann Neigungswinkel φ ist, so lässt sich sein Gewicht Q bekannt. lich in die beiden Komponenten zerlegen:



$N = Q\cos\varphi$ (Normaldruck) und $P = Q\sin\varphi$ (Tangentialkraft) zerlegen. Aus der ersteren Kraft entspringt die Reibung $F = fQ\cos\varphi$.

Eine Kraft P_1, welche ein Abwärtsgleiten des Körpers herbeiführen soll, muß:

$$P_1 = F + P = fQ\cos\varphi + Q\sin\varphi = Q(f\cos\varphi + \sin\varphi)$$

sein. Die zum Abwärtsgleiten nötige Kraft ist $P_2 = F - P = fQ\cos\varphi - Q\sin\varphi = Q(f\cos\varphi - \sin\varphi)$

die Kraft P_2 wird zu Null, d. h. die Last hängt von selbst zu gleiten an, wenn

$$\sin\varphi = f\cos\varphi \text{ oder}$$

$$f = \operatorname{tg}\varphi \qquad (47.)$$

Ist $\operatorname{tg}\varphi$ kleiner als f, so bleibt der Körper in Ruhe, überschreitet er diesen Betrag, so tritt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer Beschleunigung $b = g(\sin\varphi - f\cos\varphi)$ ein.

Ist $\operatorname{tg}\varphi$ gerade gleich f, so ist der Körper gerade noch in Ruhe, kann aber durch die geringste Unregelmäßigkeit (Erschütterung) in Bewe-

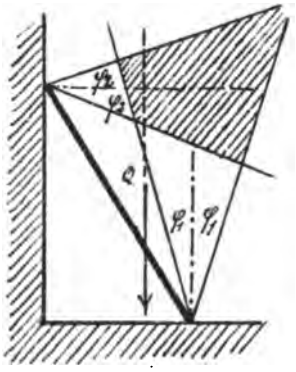
gung entsteht werden.

Man nennt den Winkel, dessen Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist, den Reibungswinkel. Derselbe gibt den größten Winkel an, unter welchem Drücke gegen eine Richtung der Normalen zur Berührungsfläche wirken darf, ohne daß ein Gleiten eintritt (resp. denjenigen Winkel, der während der Gleitung von der Richtung des Druckes eingehalten wird).

Legt man um den Reibungswinkel um die Berührungsnormale, so entsteht ein Kegel, der Reibungskegel. Der Reibungskegel umfaßt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Ruhe und der gleiche Druck stattfindet, bei denen also ein Gleiten nicht stattfindet. Mit Hilfe des Reibungskegels lassen sich viele Probleme sehr einfach und übersichtlich behandeln.

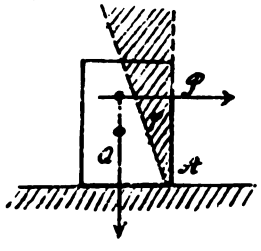
Um z.B. zu entscheiden, ob eine Kraft mit der Last Q, die auf dem rauhen Fußboden steht und sich gegen eine rauhe Wand lehnt, im Gleichgewicht ist, trage man an den beiden Unterstützungsstellen die Reibungskegel an.

Bedingung für das Gleichgewicht ist dann, daß die Richtungslinie von Q den beiden Reibungskegeln gemeinsamen (in der Figur schraffirten) Raum durchsetzt.



Da drei Kräfte sich an einem Körper Gleichgewicht halten sollen, so müssen sie in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden müssen, so kann in dem obigen Fall Gleichgewicht nicht eintreten, und es tritt dann nur Verschiebung ein, da die Reibungen immer in solchen Lagen wirken, daß Gleichgewicht herstellen wenn dies überhaupt möglich ist.

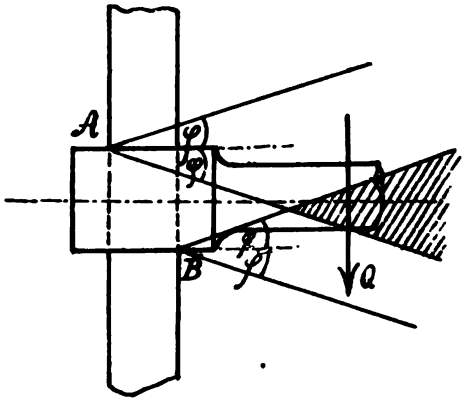
Ein anderes Beispiel bietet die Frage, ob ein Körper, von einer horizontalen Kraft P angegriffen, umkippt oder gleitet. Seine Lage bestimmt sich durch den Punkt A. Fällt der Schnittpunkt der



P und Q innerhalb des Reibungskegels von A, so wird der Punkt A festgehalten, der Körper

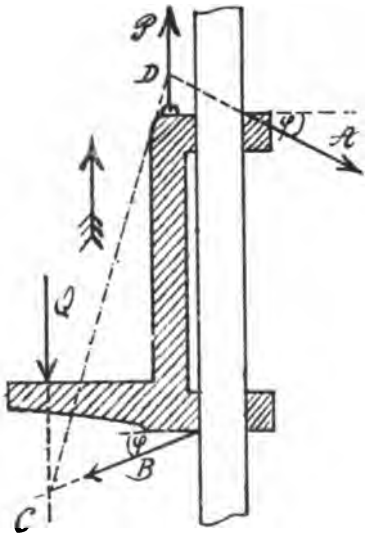
liegt nun; liegt der Schnittpunkt außerhalb der Reibungskegels, so gleitet der Körper, die resultierende Druck geht dann durch den Schnittpunkt von P u. Q und ist unter dem Reibungswinkel geneigt. (P. fig).

Reibung in Führungen. Eine seitlich von der Führungsstange an dem vorstehenden Arm angreifende Kraft Q bewirkt zunächst eine kleine Drehung der Stange, so dass sich die Lagerdrücke an den Kanten A und B konzentrieren. Trägt man in A u. B die Reibungskegel an, so tritt Gleichgewicht ein, wenn die Richtungslinien von Q den beiden Reibungskegelmänteln gemeinsam Raum durchsetzt. die Führung sitzt dann selbstsperrend; sie „klemmt" sich. die Länge einer Führung muß also klein gemacht werden, wenn sie selbstsperrend sein soll, möglichst groß aber wenn sie Bewegung gestatten soll.

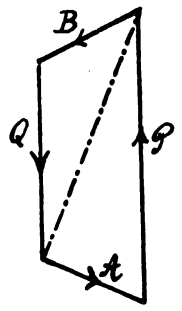


Bei einem Kopfstück mit seitlicher Führung muß die Zugkraft P der Gewicht Q und die

vertikalen Komponenten der Führungsflächen A und B übernehmen.



Die vier Kräfte müssen im Gleichgewicht stehen, es muß also auch die Resultierende aus P u. A der aus Q u. B das Gleichgewicht halten, und daher in die Linie CD fallen, hieraus die Konstruktion zur zeichnerischen Ermittlung.



Zapfenreibung (bei Zapfen mit horizontaler Achse).

Die gesamte Summe aller Normaldrücke am Umfang des Zapfens ist gleich dem Zapfendruck Q; die numerische Summe der Normaldrücke ist dann größer als Q, etwa $\Sigma N = a Q$, wobei $a > 1$ ist. Geht der resultierende Zapfendruck durch den Zapfenmittelpunkt, so ist kein Anlaß zur Gleichgewichtsstörung vorhanden. Hat die Richtung des Zapfendrucks vom Mittelpunkt

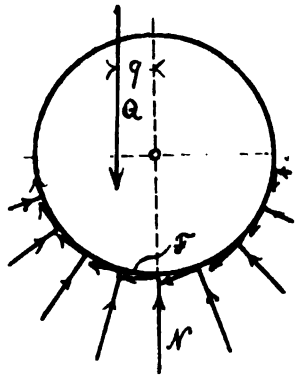
um die Kante q ab, so wird immer noch Gleichgewicht bestehen, solange

$Qq \leqq r \Sigma F$ ist, wobei r den Zapfenradius bedeutet. Im Grenzzustand des Gleichgewichts, der namentlich während der gleichförmigen Bewegung des Zapfens besteht, ist überall

$F = Nf$, und daher

$Qq = rf\Sigma N = rfaQ$, also

$$q = rfa = \varrho f \qquad (48)$$



die Größe $f = af$ heißt Zapfenreibungskoeffizient und wird ebenfalls durch Versuche festgestellt. die Exzentrizität q des Zapfendrucks ist von der Größe und Richtung unabhängig. Der mit dem Radius ϱ um den Zapfenmittelpunkt beschriebene Kreis wird Reibungskreis genannt. derselbe spielt hier eine ähnliche Rolle, wie im vorigen Abschn. der Reibungswinkel.

Gleichgewicht tritt ein, wenn die Richtungslinie des Zapfendrucks den Reibungskreis berührt; im Grenzfall des Gleichgewichts und während der Bewegung berührt sie den Reibungskreis.

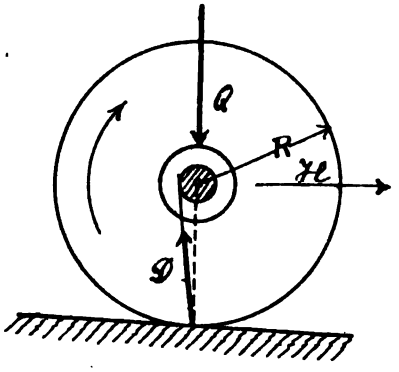
Einfluß der Zusammensetzung bei einer Schichtung. Bei der Betrachtung über den Kurbelmechanismus wurde angenommen, daß die Richtung des durch die Schichtung übertragenen Druckes durch die Zusammenstoß geht. Infolge der Zusammensetzung ist, wenn man Gewicht der Kugeln abgesehen wird, jede Linie, welche die Richtungslinie beider Zusammenstoßen schneidet, eine mögliche Wirkungslinie des Druckes, während der Berührung ist die Richtung eine beiden Kreisen gemeinsame Tangente. Welche von den verschiedenen Tangenten zustande kommt, ist nach der jeweiligen Berührung leicht zu beurteilen.

Um den Einfluß der Zusammensetzung innerhalb möglichst geringer Grenzen zu halten, muß der Zusammensetzung so klein gewählt werden, als dies mit Rücksicht auf Festigkeit und Abnützung der Werkstoffe zulässig ist.

Lagerreibung an Wagenrädern.

Die Radebahnfläche und die Lagerfläche sollen zunächst als vollkommen glatt vorausgesetzt werden. Infolge der

Zusammensetzung geht dann der Raddruck nicht durch den Zusammenstoßpunkt, sondern seine Richtungslinie berührt den Reibungskreis. Es entsteht dadurch eine horizontale Komponente des Radbruckes, die von der Zugkraft H überwunden werden muß. Es ist also



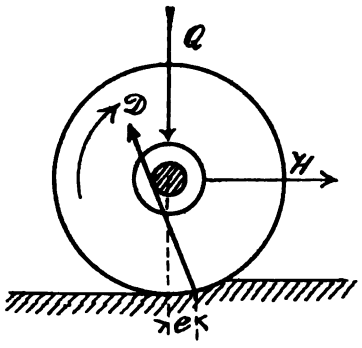
$$H \cdot R = Dg = Q \cdot r\varphi' \text{ und } H = \frac{Qr\varphi'}{R} \qquad (49)$$

<u>Rollende Reibung</u>. Diese hat ihren Grund darin, daß die Körper, welche sich aneinander abwälzen, nicht vollkommen glatt und nicht vollkommen hart sind. Der erste Umstand ist Ursache von Stößen, der zweite von unelastischen Formänderungen, in beiden Fällen aber wird Energie vergeudet.

Bei einem Wagenrad liegen die Verhältnisse etwa so:

Durch die Konstruktionsangaben des Rades wird der ursprüngliche Druck konzentriert; der Angriffspunkt des resultierenden Radbruckes rückt dabei

um die Achse C aufzuwenden. Die Größe von C ist unmittelbar abhängig von der Rauhigkeit der Unterlage und der rollenden Körper, aber nicht von den Dimensionen der Rader.



Die rollende Reibung an und für sich benötigt zu ihrer Überwindung eine horizontale Kraft

$$H = Q \cdot \frac{e}{R} \qquad (50)$$

Berücksichtigt man nun auch die Zapfenreibung, so erhält man als Gesamtzugkraft

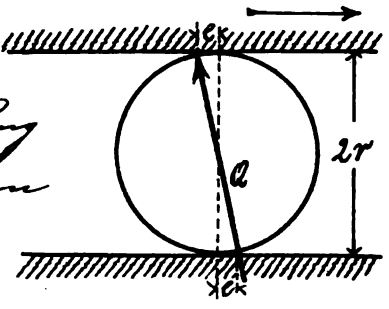
$$H = Q \cdot \frac{rf + e}{R} = f'' Q$$

Der Wert $f'' = \frac{rf+e}{R}$ wird erfahrungsgemäß nicht aus seinen Bestandteilen gerechnet, sondern aus Versuchen direkt bestimmt.

Wälzreibung.

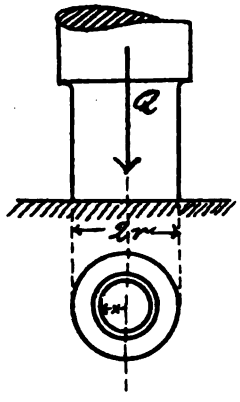
Wird der Druck zwischen zwei Körpern durch Walzen übertragen, so verschieben sich bei der Belastung die Angriffspunkte der Walzendrücke um e

und entgegengesetzten Seiten. Bei der Gleitzapfenlagerung ergibt sich, daß die Richtung der Druckkraft durch die beiden Angriffspunkte gehen muß. Die zum Fortbewegen erforderliche Kraft ist dann wie in Gl. (50)



$$P = Q\frac{\varrho}{r}$$

Reibung am stehenden Zapfen (bohrende Reibung).



Der Druck wirkt hierin senkrechter Richtung. Wird gleichmäßige Druckverteilung angenommen, so trifft auf die Flächeneinheit der Druck $\frac{Q}{\pi r^2}$ und auf einen Ringstreifen vom Radius x und der Breite dx

$$\frac{Q}{\pi r^2} \cdot 2\pi x\,dx = \frac{2Qx\,dx}{r^2}$$

die nämliche Kraft aber an diesem Ringstreifen wirkenden Reibung ist $\frac{2Q\mu x\,dx}{r^2}$ und da diese alle denselben

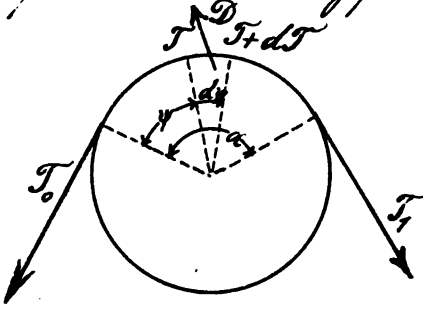
Abstand von der Drehachse haben, ist die Moment $= \frac{2Qf}{r^2} x\,dx \cdot x$, das Moment sämtlicher Reibungen ist dann

$$M = \frac{2Qf}{r^2} \int_0^r x^2\,dx = Qf \cdot \frac{2}{3} r \qquad (52).$$

in Worten: der durchschnittliche Abstand der besonderen Reibung vom Zapfenmittel beträgt $\frac{2}{3} r$.

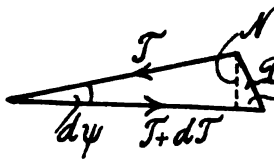
Seil- (Riemen-) Reibung.

Um einen feststehenden Zylinder sei ein biegsames Seil geschlungen.



Es soll der Grenzzustand des Gleitens untersucht werden, d.h. diejenige Spannung T_1 berechnet werden, welche gerade hinreicht, um ein Gleiten des Seiles an der Zylinderfläche hervorzurufen, wenn die Spannung T_0 am anderen Ende, der Umfangswinkel α und der Reibungskoeffizient f gegeben sind.

An dem zum Zentriwinkel $d\varphi$ gehörigen Teilelement wirken die Teilspannungen T und $T+dT$ und außer-



dann der unter dem Umschlingungswinkel gezeichnete Druck D, der gesuchte Teil und Zylinderkrümmung faserfest. Dieser kann in die Normal- komponente N und in die Reibung T gezerlegt werden, so daß T = Nf ist.

Am unbelasteten Kräftedreieck folgt

$$T = dT \text{ und } N = T\,d\psi \text{ oder } \frac{dT}{T} = f\,d\psi \qquad (53)$$

durch Integration erhält man hieraus

$$\log \text{nat } T = f\psi + c \text{ oder}$$

$$T = C e^{f\psi}$$

da für $\psi = 0$ $T = T_0$ sein muß, wird

$$T = T_0 e^{f\psi} \text{ und } T_1 = T_0 e^{f\alpha} \qquad (54)$$

T_1 kann auch graphisch gefunden werden. Man beginnt mit T_0 und zeichnet der Reihe nach kleine Kräftedreiecke ähnlich dem auf dieser Seite, und erhält durch diese Konstruktion eine logarithmische Spirale, die mit dem Radiusvektor den konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (φ Reibungswinkel) einschließt. Die Länge des unter dem Winkel α gezogenen Radiusvektor gibt dann die Spannung T_1 an.

Anmerkungen.

1. Ein Laufkranz sei an seinem Teil von Seilscheiben umschlungen, $f = 0{,}5$, $\alpha = \pi = 3{,}14$. $T_1 = T_0 e^{\alpha f} = 4{,}86\, T_0$;

Wird das Seil ganz um den Kranz herumgeschlungen, so wird $T_1 = (4{,}86)^2 T_0 = 23{,}6\, T_0$, bei 3maligem Herumschlingen wird bereits $T_1 = 55\, T_0$ usw. Es kann also für eine sehr kleine Kraft eine sehr große Gleichgewicht halten.

2. Riemenrad. Während des normalen Ganges muß die Riemenscheibe durch die Reibung mitgenommen werden. Die zum Betrieb der betreffenden Maschine notwendige Umfangskraft P ist dann gleich der Differenz der Riemenspannungen:

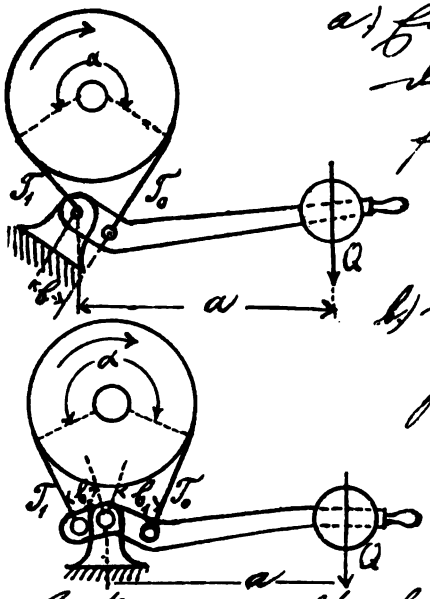
$$P = T_1 - T_0 = T_0 (e^{f\alpha} - 1)$$

Hieraus kann T_0 und T_1 gerechnet werden.

(Bei der Bremsung wird T_0 größer genommen, um gegen Gleiten gesichert zu sein).

Die Spannung während des Stillstandes der Übertragung ist $\frac{T_1 + T_2}{2}$.

3. Laufkrane.



a) Einfache Laufkrane

die abzutragende Umfangskraft sei P, dann ist

$$P = T_1 - T_0 = T_0(e^{\mu\alpha} - 1)$$

$$Q = \frac{b}{a} T_1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

b) Wegersche Differentialkrane.

Hier ist $Q = \frac{b_1}{a} T_0 - \frac{b_2}{a} T_1$

Wie oben ist $T_0 = \frac{P}{e^{\mu\alpha} - 1}$ und

$T_1 = \frac{P e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$; hieraus

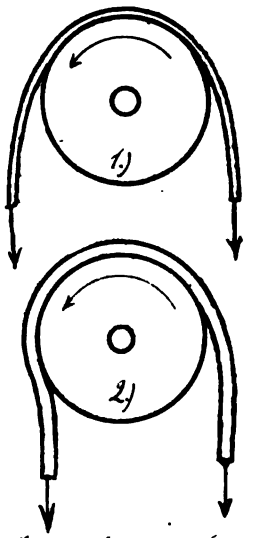
$$Q = \frac{P}{a} \cdot \frac{b_1 - b_2 e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Es kann also hier mit einer beliebig kleinen Kraft eine sehr große abgebremst werden. Ist die Anordnung so, daß $b_2 e^{\mu\alpha} \geq b_1$ wird, so wird $Q = 0$ resp. negativ, d. h. die Krane tritt nur schon mit einer Kraft Q in Tätigkeit, sie ist selbstsperrend. Bei dem aufsteigenden Trum muß immer eine kleinere Belastung wirken.

Seilsteifigkeit.

Bei sehr großen Radien der Teilkreise empfiehlt es das Seil nachgiebig wie eine absolut biegsame Kette, bei kleinen Radien dagegen fast das Seil der Krümmung einem

Widerstand entgegen, den man Teilbarkeit nennt; es bedarf daher, um das Teil zu krümmen, eines gewissen Momentes, das der Krümmung proportional ist. Das Teil geht also nicht plötzlich aus der geraden Form in die Kreisform über, sondern es schaltet sich eine Übergangskurve ein, das Teil spreizt sich zum Rollenumfang ab, dadurch wird der Scheitelwert der Teilspannung (vom Querschnittsmittelpunkt aus gerechnet) vergrößert. Ist die Krümmung rein elastischer Natur (wie annähernd bei Drahtseilen) fällt der Übergang auf beiden Seiten gleich (Fig. 1), und die Teilsteifigkeit hat keinen Einfluß auf das Verhältnis der Teilspannungen an der Rolle. Ist dagegen der Krümmung eine rein plastische d. h. sind sämtliche Formänderungen bleibende, so bedarf es auf dem ablaufenden Trumm eines Momentes, um das Teil weiter gerade zu strecken. Das Teil krümmt sich also nach innen zu (Fig. 2). Dadurch wird der Scheitelwert der Teilspannung auf dieser Seite vermindert. Diese Erscheinung tritt z. B. bei einem Gleitseil zu Tage. Bei den gewöhnlichen Transmissions-



missionspitzen und -Rinnen sind die Formänderungen stets elastisch und stets plastisch. Man nimmt daher an, daß der Anstauchen sich bei den beiden Grenzfällen stattfindet, daß dagegen beim Abstauchen weder eine Abgrenzung noch ein Extremum stattfindet. Die Gleichheit der Schalenform, die ja Berücksichtigung der Teilplastizität voraussetzen wäre, besteht aber nachher nicht mehr. Nach dem Maximumsatze muß daher die Formänderung des abstauchenden Stumpf größer sein als die des anstauchenden. In demselben Sinne tritt auch die Zugfestigkeitsprüfung als Widerstand auf und vermehrt diese Ungleichheit.

Definiert man mit der Gleichung

$$S_1 = \eta S_0 \qquad (55.)$$

den Wirkungsgrad (Güteverhältnis) η einer Teilfuge, so bezeichnet dieser das Verhältnis der beiden Teilspannungen ($S_1 < S_0$).

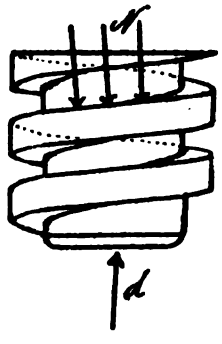
Setzt das Teil der Reihe nach über n gleiche Fugen, so ist die Teilspannung S_n beim Anstauchen auf die letzte Fuge, wenn an der ersten mit S_0 gezogen wird:

$$S_n = \eta^n S_0 \qquad (56)$$

Das Problem der Teilsteifigkeit läßt sich auch mit Hilfe des Arbeitsprinzips lösen. Es muß nämlich die Arbeit der Differenz der bei den Verbindungen gleich der Summe aus der Zusammenbiegungsarbeit und der gesamten Verschiebungsarbeit sein. Nur beim vollkommen elastischen Teil fällt letztere fort, da sie vollständig wiedergewonnen wird.

Schraubenreibung.

a. Bei Schrauben mit flachem Gewinde und geringer Neigung können die Normaldrücke, die in den Berührungsflächen des Gewindes auftreten, als mit der Achse parallel, die Reibungen als in der Achse projiziert angesehen werden. Wirkt nun parallel zu s eine Kraft P und soll durch die Schraube eine Last Q gehoben werden, so ist wenn noch h die Ganghöhe und l der mittlere Umfang der Gewindewindung bezeichnet, nach dem Satz von der Arbeitsgleichung:



$$P \cdot 2\pi\rho - Qh + lZF,$$

Projiziert man alle Kräfte auf die

Schraubenachse, so ist $\Sigma N = Q$ und daher

$$\Sigma F = f \Sigma N = fQ$$

Aus der entsprechenden Gleichung wird daher

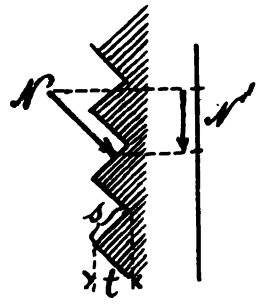
$$P \cdot 2\pi\rho = Q(h + lf) \quad \text{und} \quad P = Q\frac{h + lf}{2\rho\pi} \qquad (57).$$

Die Kraft, welche zur Reibung nötig wäre, verschwindet, wenn $f = 0$. Das Verhältnis der Kraft

$$\eta = \frac{h}{h + lf} \qquad (58).$$

ist der Wirkungsgrad der Schraube.

b.) bei scharfem Gewinde und ganzer Reibung.



Es sei s die Breite des Gewindequerschnittes u. t die Gewindetiefe, dann ist, wenn N' die Projektion von N auf die Schraubenachse ist:

$$\frac{N'}{N} = \frac{t}{s};$$

Nach dem Komponentensatze ist

$$\Sigma N' = Q, \text{ und daher } \Sigma N = \frac{s}{t} Q.$$

Es tritt daher in Gleichung (57) und (58) zum Gliede lf noch der Faktor $\frac{s}{t}$ hinzu:

$$P = Q\frac{h + f\frac{ls}{t}}{2\rho\pi}; \qquad \eta = \frac{h}{h + lf\frac{s}{t}}$$

Der Einfluß der Reibung ist also bei scharfem Gewinde im Verhältnis $\frac{s}{t}$ größer als

bei flachen. Man unterscheidet daher selbsthemmende für Befestigungs-, lastsenkende für Lösungsschrauben.

c.) Bei flachen Gewinden und großer Steigung.

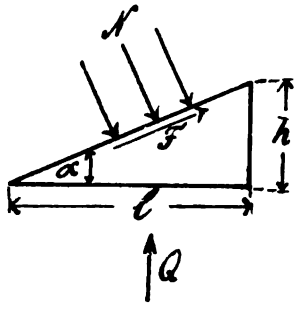
Man setzt hier unter Anwendung des Komponentensatzes:

$$N' = N\cos\alpha\,;\quad F' = F\sin\alpha\,;$$

$$\Sigma N\cos\alpha = Q + \Sigma F\sin\alpha\,;$$

$$F = Nf\,;\quad \Sigma N\cos\alpha - \Sigma Nf\sin\alpha = Q$$

(α ist der Steigungswinkel der Schraube).



hieraus: $\Sigma N = \frac{Q}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$ und

$\Sigma F = \frac{Qf}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$

Mit diesen Werten (Gl. 57) u. (58):

$$P = \frac{Q}{2\pi p}\left(h + \frac{lf}{\cos\alpha - f\sin\alpha}\right)$$ und

$$\eta = \frac{h}{h + \frac{lf}{\cos\alpha - f\sin\alpha}}$$

Für $\cos\alpha = f\sin\alpha$ oder $\underline{\operatorname{ctg}\alpha = f}$ wird $P = \infty$ und $\eta = 0$, d. h. bei solch steilem Gewinde ist keine Kraft mehr imstande, die Gegenkraft Q zurückzudrängen.

(Auch für $\alpha = 0$ wird $\eta = 0$, der h-Wert fällt; das hat hier keine Bedeutung, da für den Charakter der Schraube verloren gegangen ist.)

η wird zu einem Maximum für $\frac{d\eta}{da} = 0$ (vor der Differentiation muß $h - l \sin\alpha$ eingesetzt werden); dies ist der Fall für

$$\operatorname{tg} 2\alpha = f$$

Mit Q also treibende Kraft und ist P zu überwinden (geht also die Leitung in ungünstiger Richtung vor sich), so kehrt die Reibung ihre Richtung um. Man erhält die zugehörigen Formeln, indem man f durch $-f$ ersetzt.

Es ist dann

$$P = \frac{Q}{2\pi p}\left(h - \frac{lf}{\cos\alpha + f\sin\alpha}\right)$$

$$\eta' = \frac{h - \frac{lf}{\cos\alpha + f\sin\alpha}}{h}$$

η' und P werden $= 0$ für

$\operatorname{tg}\alpha = f$, bei diesem Winkel kann also keine Kraft Q eine Drehung bewirken. Ist $\operatorname{tg}\alpha < f$, so sagt man die Schraube selbsthemmend. η' wird zu einem Maximum für $\operatorname{tg} 2\alpha = -f$.

Energie.

Die eingangs (Gl. 5) entwickelte Definition positiver Arbeit und Lebendiger Energie wurde zuerst am Pendelstab gefunden, obwohl zahlreiche Anwendungen schon früher bekannt waren. Allmählich wurde der Begriff der Energie auf andere Naturwissenschaften übertragen und rief hier gewaltige Umwälzungen hervor, indem der Satz von der Erhaltung der Energie neben dem von der Erhaltung der Materie zum Ausgangspunkt für die Beurteilung der Naturvorgänge geworden ist. Die Mechanik, aus der der Begriff der Energie hervorgegangen war, wurde durch die Entdeckung derselben weniger berührt, doch wurden auch hier jetzt die aus den Energiebetrachtungen hervorgehenden Sätze (z. B. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) häufig an Stelle der Momentan-Sätze gestellt vorangegangen.

In der eigentlichen Mechanik werden nur drei Energiearten in Betracht gezogen:

1.) die kinetische Energie (Lebendige Kraft),
2.) die potentielle Energie der Lage (z. B. Arbeitsvermögen eines aufgezogenen Gewichtes),
3.) die mit der Formänderung elastischer Körper verbundene potentielle Energie (z. B. Arbeitsvermögen einer gespannten Feder).

Tritt auf andere Energiearten (Wärme, Elektricität u. s. w.) ins Spiel kommen, erweitert sich die Mechanik zur theoretischen Physik.

Bei jedem mechanischen Vorgang findet eine Umwandlung oder Übertragung von Energie statt. Das Maß für die Größe des Energieumsatzes bildet die geleistete Arbeit; diese ist daher nicht als eine besondere Energieart aufzufassen, obwohl sie die gleichen Dimensionen wie die Energie besitzt.

Alle bekannten Energieformen lassen sich auffassen als Produkte aus zwei Faktoren, von denen der eine als Quantität,

der andern als Intensitätsfaktor gedacht werden kann (bei der kinetischen Energie stellt z.B. die Masse die Quantität und die Geschwindigkeit den Intensitätsfaktor dar). die beiden Faktoren können Faktoren sein; dann ist die Energie dem Skalar nach Produkt, jedenfalls aber ist die Energie immer eine Größe ohne Richtung im Raum.

Den Vorgang der Energie-Übertragung kann man sich in der Weise vorstellen, daß die Energie, als Leistung betrachtet, ihren Ort wechselt und gewissermaßen von einem Ort zum andern fließt. Es kommt man zu dem Begriff des Energiestroms, der stets eine gerichtete Größe ist. Typische Arten sind z.B. der Wärmestrom und der elektrische Strom. In der eigentlichen Mechanik ist ein Energiestrom unmöglich, wenn sich Körper bewegen, die die Energie entweder durch Convektion fortführen oder sie durch Vermittlung eines Energiezustandes (elastische Deformation) fortleiten (gespannter Riemen, Transmissionswelle u.s.w.)

Die Richtung des Energiestroms braucht

im letzteren Falle nicht mit der Belastungsrichtung zusammenfallen. Für die in die Richtung der betreffenden Spannung (über Spannungen siehe nächstes Kapitel) fallende Komponente der Belastung gilt folgendes: bei Druckspannungen ist der Energiestrom der Belastung gleichgerichtet, bei Zugbeanspruchung entgegengesetzt, und bei Scher- (Torsions-) Beanspruchung gleichgültig für die Belastungsrichtung.

Zusammenstellung der technischen und physikalischen Energiemasse (Tiefe auf S. 38).

	technisch	physikalisch
Kraft	1 kg = ca. 981000 dyn	1 dyn
Energie	1 mkg = $981 \cdot 10^5$ erg = 9,81 Joule	1 erg = 1 dyn. cm, entsprechend 1 Joule = 10^7 erg
Energiestrom	1 P.S. = 75 mkg/sec = 735,7 Watt = 0,7357 Kilowatt	1 Watt = 10^7 erg pro Sec. = 1 Joule pro Sec. 1 Kilowatt = 1000 Watt = 10^{10} erg pro Sec.

Elemente der Festigkeitslehre.

Die Aufgabe der Festigkeitslehre ist im allgemeinen eine doppelte:

1.) für einen gegebenen Körper mit gegebenen äußeren Kräften die inneren Kräfte und die damit zusammenhängenden Formänderungen zu berechnen,

2.) die Dimensionen eines Körpers so zu ermitteln, daß er gegebenen äußeren Kräften mit Sicherheit widerstehen kann.

Die inneren Kräfte sind direkter Messung nicht zugänglich, wohl aber können die bei äußeren Belastungen auftretenden Formänderungen beobachtet werden. Ein Weg, die inneren Kräfte und den Zusammenhang über das Gleichgewicht der Kräfte an einem Körper (Seite 55 bis 58) zu ermitteln, wird nun folgendermaßen gefunden: Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Körper folgen die inneren Kräfte aus dem Prinzip der Aktion und Reaktion gleich groß

Um sie der Rechnung zugänglich zu machen, müssen sie zu äußeren Kräften gemacht werden.

Dies geschieht, indem man einen Schnitt durch den Körper geführt denkt und an einem der abgetrennten Teile der Gleichgewicht der Kräfte untersucht. Durch den Schnitt sind die in der Schnittfläche vom andern Teil übertragenen Spannungen in Wegfall gekommen. Um wieder Gleichgewicht herzustellen, muß in der Schnittfläche eine Kraft eingeführt werden, deren Größe und Richtung mit den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden kann. Diese fingierte Kraft hat also dieselbe Wirkung, wie die in der Schnittfläche wirkenden Spannungen, die sie durchtritt, sie muß also identisch mit der Resultierenden derselben sein. Über die genauere Verteilung der einzelnen Kräfte über den Querschnitt gibt die Schnittmethode keinen Aufschluß.

Die in der Festigkeitslehre behandelten Aufgaben gliedern sich vor allem

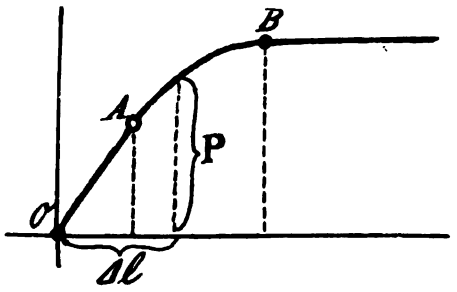
nach der Gestalt der zu untersuchenden Körper (stabförmige, plattenförmige u. s. w.). Hier können nur die gewöhnlichen stabförmigen Körper Erledigung finden.

Bei diesen unterscheidet man fünf Belastungsfälle, aus denen alle übrigen sich zusammensetzen lassen, nämlich Zug, Druck, Schub, Biegung, Knickung und Verdrehung (Torsion).

1.) Zugfestigkeit. Die Zugfestigkeit eines Körpers wird in Anspruch genommen, wenn an seinen Enden Kräfte wirken, welche die einzelnen Punkte des Körpers von einander zu entfernen suchen. Der Versuch einer gegebenen Probe untersucht man, indem man sie in eine Materialprüfungsmaschine allmählich immer größeren Zugkräften aussetzt und die dabei auftretenden Formänderungen beobachtet. Es zeigt sich dabei ein gesetzlicher Zusammenhang zwischen den Belastungen P und den Längenänderungen Δl.

Trägt man die Δl als Abscissen

und die zugehörigen Punkte Ordinaten in einem Koordinatensystem auf, so erhält man ein Spannungsdiagramm, das bei Metallen in der Regel nebenstehende Gestalt hat. Von O bis A ist die Spannungsverteilung (die Dehnungen sind den Belastungen proportional), von A bis B ist sie gekrümmt und bei B geht sie in eine wagrechte Linie über (d. h. die Dehnungen nehmen rascher zu als die Belastung, der Metallfaden) der dem Punkt A entsprechende Zustand heißt Proportionalitätsgrenze, B entspricht der Bruchgrenze.



Ein Stab, der schon öfters belastet war, geht nach Entfernen der Zugbelastung nicht ganz in seine ursprüngliche Länge zurück, wenn die Belastung nicht zu groß war (bei der ersten Belastung bleibt gewöhnlich ein kleiner Dehnungsrest). Die Belastung, über die hinaus bleibende Formänderungen

bemerkt werden, heißt Elastizitätsgrenze. Bei Metallen fällt die Elastizitätsgrenze ungefähr mit der Proportionalitätsgrenze zusammen.

Außer den Dehnungen in der Längsrichtung treten Verkürzungen in der Querrichtung ein, die verhältnismäßig 1/3 bis 1/4 der Dehnungen betragen, so lange die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird.

Als Maß für die Beanspruchung der inneren Kräfte dient die Spannung per Flächeneinheit (G), deren Dimension ist $K^1 L^{-2}$. Sie wird in der Festigkeitslehre und im Maschinenbau in Atmosphären, d. i. in kg pro qcm gemessen, im Brückenbau dagegen in t (Tonnen) pro qdm.

Bei einem prismatischen Stab, der an Zugkräften angriffen wird, deren Richtungslinien durch die Schwerpunkte der Querschnittsflächen gehen („zentrische Zugbeanspruchung"), findet die Verteilung der Spannungen in jedem Querschnitt in gleicher Weise statt (abgesehen von der Nähe der Einspannstellen). Daraus, daß jede Faser gleich viel gedehnt wird, folgt, daß auch die

Spannung über den Querschnitt gleichmäßig verteilt ist, daß also, wenn P die Zugkraft in kg und F den Querschnitt in qcm bedeutet, die Beziehung besteht

$$\sigma = \frac{P}{F} \qquad (60)$$

Zwischen σ und Δl besteht innerhalb der Proportionalitätsgrenze das Hooke'sche Gesetz:

$$\Delta l = a l \sigma \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \qquad (61)$$

Es bezeichnet hierbei l die ursprüngliche Länge, der Wert a (eine von der Art des Materials abhängige Konstante) heißt Dehnungskoefficient, dessen reziproker Wert E wird Elastizitätsmodul genannt. Letzterer bezeichnet diejenige Spannung, bei der ein Stab, vorausgesetzt, daß dabei die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wäre, auf die doppelte Länge ausgedehnt würde (so daß $\Delta l = l$ wird).

Zulässige Spannungen. Es genügt nicht, einen Körper, der gewisse Kräfte aufzunehmen hat, so zu bemessen, daß er durch die Kräfte nicht zertrümmert wird, sondern es müssen auch bleibende Formänderungen vermieden werden, d. h. die größte auftretende Spannung muß unter der Elastizitätsgrenze bleiben.

Bauschinger hat nachgewiesen, daß ein Körper

auf dadurch zum Bruche gebracht kann, daß in ihr häufig wiederholte Dehnungswechsel auftreten, die über die Elastizitätsgrenze hinausgehen, besonders wenn sie mit Biegungen verbunden sind. Man hat daher, um sicher zu gehen, festgesetzt, daß in diesem Fall die zulässige Dehnung $\frac{1}{3}$ der Elastizitätsgrenze nicht überschreiten darf, während man bei ruhender Belastung bis auf $\frac{2}{3}$ gehen kann.

Für Flußeisen stellen sich die Zahlen folgendermaßen dar:

Elastizitätsgrenze bei 1600 – 1800 Atmosph.
Bruchgrenze bei 3000 – 3600 „
Dehnung bei 4000 – 4500 „

Die zulässige Dehnung ist für ruhende Belastung (z. B. bei eisernen Hochbaukonstruktionen) bis $\frac{2}{3} \cdot 1800 = 1200$ Atm.; bei wechselnder Belastung (z. B. bei Maschinenteilen) $= \frac{1}{3} \cdot 1800 = 600$ Atm.

Der Elastizitätsmodul des Eisens ist im Mittel 2000000 Atmosphären.

Beispiele. 1.) Welchen Durchmesser (d) muß ein eiserner Zug von 6 Tonnen im Querschnitt bei wechselnder Belastung

erfolgen, wenn dieselbe bis zu dem Maximalwert P steigt?

(60) $\sigma = \frac{P}{F}$, $\sigma_{zul.} = \frac{P}{\frac{d^2\pi}{4}}$; $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_{zul}}}$

$\sigma_{zul.} = 600 \frac{kg}{qcm}$; $d = 0{,}046\sqrt{P}$ (d in cm)

Die dabei auftretende Verlängerung ist

$\Delta l = \frac{l \cdot \sigma}{E} = \frac{Pl}{EF}$; $\Delta l = \frac{l \cdot 600}{2000000} = 0{,}0003\, l$

2.) Wie lang darf ein senkrecht aufgehängter Stab (Seil) konstantem Querschnitt gemacht werden, um seine Eigengewicht noch mit genügender Sicherheit zu tragen?

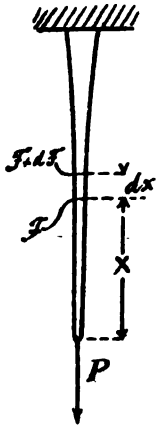
γ = Gewicht eines ccm (in kg), F = Querschnitt, σ zulässige Spannung.

$\sigma = \frac{P}{F}$; $P = l F \gamma$; $\sigma = l\gamma$ $l = \frac{\sigma}{\gamma}$

(Bei einem Drahtseil $l = \frac{600}{0{,}0076} = 79000$ cm = 790 m Unabhängig von der Stärke des Seiles).

3.) Anders verhält sich die Sache, wenn der Querschnitt des Seiles in der Weise veränderlich gemacht wird, daß überall die zulässige Spannung σ herrscht (verjüngtes Seil, wie es in Bergwerken in Anwendung ist). Es sei P die am unteren Ende angehängte

Richtung und x die Entfernung eines Querschnittes vom unteren Ende. An der Stelle x + dx ist die Zugkraft um das Gewicht des Körpers F dx, also um γ F dx größer als bei x. Der Querschnitt hat um dF zugenommen; die Spannung bleibt konstant, wenn das Gewicht der Last vom Gewicht des Querschnittes aufgenommen wird, wenn also



$$dF \cdot \sigma = \gamma F dx \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{F}\sigma = \gamma\, dx.$$

Durch Integration folgt

$$\sigma \log nat\, F = \gamma x + C \quad \text{oder}$$

$$F = C' e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$ und da für $x = 0$

$F_0 = \frac{P}{\sigma}$ sein muß, ist:

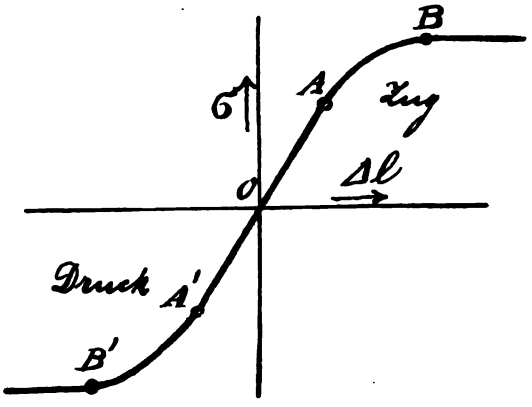
$$F = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$

2.) Druckfestigkeit.

Ein Körper wird auf Druck beansprucht, wenn die an ihm wirkenden Kräfte die Punkte des Körpers einander zu nähern versuchen.

Bei den meisten Körpern, die auf

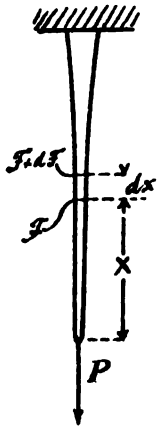
Hookesche Gesetz befolgen, ist das Verhalten gegen Druck ganz dem gegen Zug analog, es ist auch hier eine Proportionalitätsgrenze (A') und eine Fließgrenze B' vorhanden.



Auf die Formel $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$ gilt immer. indem, wobei für σ als Druckspannung negativ einzusetzen ist; dadurch wird auch Δl negativ, bedeutet also eine Verkürzung. Versuchungen haben gelehrt, daß der Elastizitätsmodul für Druck ebenso groß ist als für Zug, daß also im Spannungsdiagramm der Druck A'O A eine Gerade ist. Neben der Verkürzung in der Längsrichtung tritt für manche der Belastung beim Zug eine Verbreiterung in der Querrichtung auf, so zwar, daß $\frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{\Delta l}{l}$ ist (bei den meisten Metallen ist

$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{3}{10} \frac{\Delta l}{l}).$$

Richtung und x die Entfernung eines Querschnittes vom unteren Ende. An der Stelle x + dx ist die Zugkraft um das Gewicht des Stückes F dx, also um γ F dx größer als bei x. Der Querschnitt sei um dF gegangen, die Spannung bleibt konstant, wenn der Zuwachs des Querschnittes proportional wächst der Last vom Zuwachs des Querschnittes proportional wächst, wenn also



$$dF : F = \gamma F dx : \sigma \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx.$$

Durch Integration folgt

$$\sigma \log nat\, F = \gamma x + C \quad \text{oder}$$

$$F = C' e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \quad \text{und da für } x = 0$$

$F_0 = \frac{P}{\sigma}$ sein muß, ist:

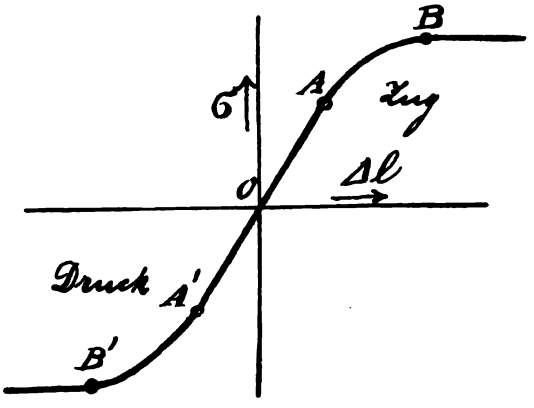
$$F = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

2.) Druckfestigkeit.

Ein Körper wird auf Druck beansprucht, wenn die an ihm wirkenden Kräfte die Punkte des Körpers einander zu nähern versuchen.

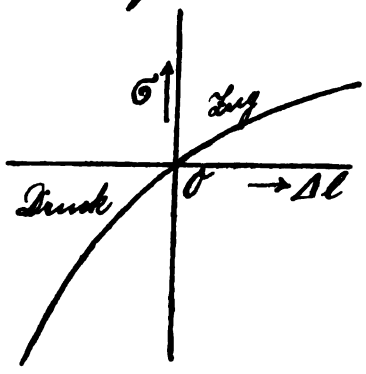
Bei den meisten Körpern, die auf

Hookesche Gesetz befolgen, ist der Widerstand gegen Druck ganz dem gegen Zug analog, es ist nur für eine Proportionalitäts-grenze (A') und eine Fließgrenze B' vorhanden.



Auf die Formel $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$ gilt insofern, als σ als Druckspannung negativ eingeführt ist; dadurch wird auch Δl negativ, bedeutet also eine Verkürzung. Versuche haben gelehrt, daß das elastische Verhältnis für Druck ebenso groß ist als für Zug, daß also im Spannungsdiagramm der Strich $A'0A$ eine Gerade ist. Neben der Verkürzung in der Längsrichtung tritt für manche der Belastung beim Zug eine Verbreiterung in den Querrichtungen auf, so zwar, daß $\frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} \frac{\Delta l}{l}$ ist (bei den meisten Metallen ist $\frac{\Delta b}{b} = -\frac{3}{10} \frac{\Delta l}{l}$).

Nicht alle Körper jedoch zeigen dieses Verhalten. Es fällt nämlich bei einigen Gesteinen und Gesteinen sind die wichtigsten dieser Gruppe das gerade Stück im Formänderungsdiagramm vollständig. Die Dehnungen wachsen schneller als die Belastungen, die Verkürzungen bei Druck dagegen langsamer. Es lässt sich daher bei diesen Materialien kein bestimmter Elastizitätsmodulus angeben und ferner diese Feststellungen der Festigkeitslehre dürfen hier nur mit Vorsicht angewendet werden.



Bei gerichteter Druckbeanspruchung ist wie beim Zug $\sigma = \frac{P}{F}$.

Bei Materialien der zweiten Art liegt zwischen der Elastizitäts- wie auch der Bruchgrenze annähernd gleiches sowohl für Zug und Druck, so gelten diese auch betreffs der zulässigen Spannungen dieselben Bezeichnungen.

Bei Materialien der letzteren

Gruppe dagegen ist die zulässige Druck-
spannung durchschnittlich dreimal so hoch
als die zulässige Zugspannung. Bei Stei-
nen ist überdies auch die Höhe der Pro-
beprismen von wesentlichem Einfluss. Für
sie gilt die aus zahlreichen Versuchen
von Bauschinger
abgeleitete empirische Druckbelastung

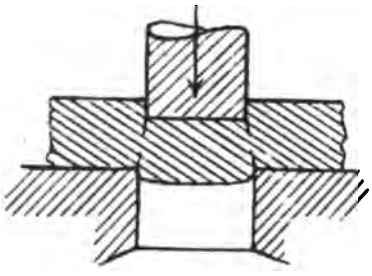
$$\sqrt{\frac{F}{\frac{1}{4}u}\left(\lambda + \nu\sqrt{\frac{F}{h}}\right)} \qquad (62).$$

(F ist der Querschnitt, u der Umfang
desselben, h die Höhe der Probekörper;
λ und ν sind Konstanten, die für jede
Steinsorte besonders zu bestimmen sind.
Für einen Würfel vereinfacht sich
diese Formel auf $\sigma = \lambda + \nu$.

Als Beispiel sei hier angeführt, dass
für Luftziegelmauerwerk $\lambda = 20{,}6$ und
$\nu = 15{,}8$ Atm. wird.

Schubfestigkeit, auch Scherfestigkeit genannt.
Sie muss überschritten werden, wenn
ein Körper in einem Querschnitt, ab-
geschert werden soll, wie dies z. B.
beim Schneiden mit der Schere oder

beim Bruche von Eisen der Fall ist. Die in der Praxis am häufigsten vorkommende Schubbeanspruchung ist die der Nietbolzen. Gewöhnlich rechnet man auch für sie nach Gl. 60, d. h. man setzt eine gleichförmige Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt voraus. Eine genauere Untersuchung lehrt, daß die Randfasern stärker gedrückt, trotzdem ist diese vereinfachte Annahme zulässig, wenn die Wahl der zulässigen Spannung so getroffen wird, daß sie mit Versuchen gleicher Art im Einklange steht, denn die Abweichungen von der tatsächlichen Verteilung sind dann, da sie immer den gleichen Einfluß haben, schon mit berücksichtigt.

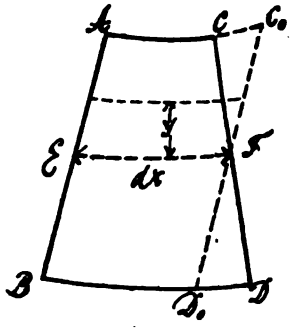


Biegungsfestigkeit.

Die Biegung ist eine Wirkung von statischen Momenten der äußeren Kräfte, deren Momentenachsen senkrecht zur Balkenachse stehen. Bei einem gerade Stab

äußert sie sich dadurch, daß die vorher gerade Balkenachse sich krümmt. Dabei bleiben jedoch die zur Balkenachse senkrechten Querschnitte auch nach der Biegung eben. Diese „Navier'sche Annahme" hat sich durch Versuche bestätigt.

Auf dieser Eigenschaft der Formänderung kann nun das Gesetz für die Verteilung der Spannungen gefunden werden. Für diesen Zweck sei ein durch zwei um dx von einander abstehende, vor der Biegung parallele Querschnitte ausgeschnittenes Balkenelement herausgegriffen.



Durch die Biegung seien die Querschnitte eine geneigte Lage erhalten. Dabei würden gewisse Fasern des Querschnittes (z. B. AC) verkürzt, andere (BD) verlängert.

Eine Schicht jedoch, die <u>neutrale Faser</u> (ES) behält ihre ursprüngliche Länge bei.

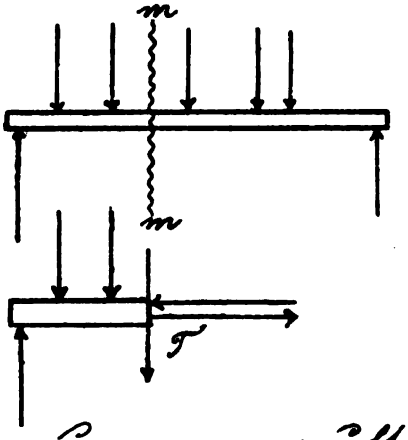
Die Längenänderungen aller übrigen Fasern sind, wie aus der Navier'schen Annahme folgt und aus der Figur ersichtlich

ist, proportional dem Abstand y von der neutralen Faser. Für die Materialien, welche das Hooke'sche Gesetz ($\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$) befolgen, gilt diese Proportionalität auch für die Spannungen. Bezeichnet σ' die Spannung im Abstande 1 von der neutralen Faser, so gilt für die Spannung σ im Abstand y

$$\sigma = \frac{\sigma'}{e} y \qquad (63).$$

Diese Gleichung gilt gemeinsam für die gedrückte und für die gezogene Seite, wenn die Abstände y von der neutralen Faser auf der unteren Seite für negativ gerechnet werden (die Druckspannungen werden hierbei als negative Zugspannungen aufgefasst, was darin seine Berechtigung hat, dass bei Materialien, die das Hooke'sche Gesetz befolgen — nur für diese trifft die Berechnung streng zu — der Elastizitätsmodul für Zug und Druck gleich ist).

Um den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den äußeren Kräften zu erhalten, sei bei einem beliebig belasteten Balken durch den fraglichen Querschnitt die Stelle mm gelegt.



die Gleitsicherheitsbedingung gegen Verschieben angewendet auf die spezielle Richtung lehrt, dass näher der bereits erwähnten Zug- und Druckspannungen im Querschnitt mm auch noch Schubspannungen auftreten, deren Resultierende T die Summe der äußeren Kräfte links vom Schnitt zu Null ergänzt.

Wie uns unsere Erfahrung lehrt, sind aber in den meisten Fällen diese Schubspannungen gegenüber den Zug-Spannungen sehr klein und können daher vernachlässigt werden. Nur bei sehr langen Nieten muss sich ihr Einfluss bemerkbar machen.

Der Gleitsicherheit gegen Verschiebung in der Querschnittsebene fordert, dass die Summe aller Zug- und Druckkräfte im Querschnitt Null sei. Besteht in einem Flächenelement dF die Spannung σ, so ist die durch das Flächenelement übertragene Kraft $= \sigma \cdot dF$. Die

Summe aller $\sigma\, dF$ über den ganzen Querschnitt erstreckt, muß also Null ergeben.

$$\int \sigma\, dF = 0 \,,$$

oder mit Berücksichtigung von Gleichung (63):

$$\int y\, dF = 0 \qquad (64)$$

$\int y\, dF$ ist das statische Moment des Querschnitts bezüglich der neutralen Linie; daraus daß es $= 0$ ist, folgt, daß die neutrale Linie durch den Schwerpunkt der Querschnittfigur geht (Vergl. Seite 78.).

Als dritte Gleichgewichtsbedingung endlich wurde der Momentensatz angewandt bezüglich der Schwerpunkte des fraglichen Querschnittes. Das Moment der inneren Kräfte wird erhalten, indem man jedes $\sigma\, dF$ mit seinem Hebelarm y multipliziert und die Summe über den ganzen Querschnitt erstreckt. Dieses Moment muß das Moment aller äußeren Kräfte $M = \Sigma(Pp)$ gleich sein, also

$$M = \int \sigma\, dF$$

oder nach Gl (63):

$$M = \frac{\sigma'}{c} \int y^2\, dF \qquad (65).$$

Das Integral $\int y^2\, dF$ ist das Trägheitsmoment Θ des Querschnitts für die durch den Schwerpunkt gehende neutrale Linie.

Bezeichnet e den Abstand desjenigen Flächenelements, welches am weitesten von der Nulllinie entfernt ist, so ist die ihm entsprechende Spannung σ' die größte, die im ganzen Querschnitt auftritt, so ist dann

$$\sigma' = \frac{M}{\Theta} \cdot e \qquad (66).$$

Man setzt den Quotient $\frac{\Theta}{e}$ in eine Größe W zusammengefaßt und nennt W das Widerstandsmoment, genannt. Gleichung (66) erhält dann die Form

$$\sigma' = \frac{M}{W} \qquad (66a).$$

Für den rechteckigen Balkenquerschnitt wird, wenn h die Höhe und b die Breite des Querschnitts bezeichnet,

$$\Theta = \frac{bh^3}{12} \text{ und}$$

$$W = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}, \text{ also}$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2}$$

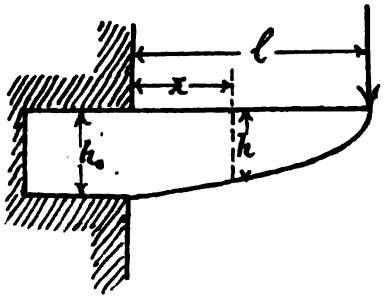
Für den Kreisquerschnitt ist

$$\Theta = \frac{\pi r^4}{4}, \quad W = \frac{\pi r^3}{4}, \quad \sigma = \frac{4M}{\pi r^3}$$

die größte Spannung im ganzen Balken und daher die größte Beanspruchung an der Stelle auf, wo das Moment das

äußeren Kräfte am größten ist, vorausgesetzt, daß der Querschnitt über die ganze Länge konstant ist.

Man kann aber auch den Querschnitt in der Weise veränderlich machen, daß Gl. (66) in jedem Querschnitt für denselben Spannung σ liefert, so daß also das Material überall vollständig ausgenützt wird. Man erhält auf diese Weise einen Balken von gleicher Festigkeit.



Es soll z. B. ein an einem Ende belasteter, am anderen eingemauerter Rechteckbalken als Körper von gleicher Festigkeit konstruiert werden. Die zulässige Spannung sei σ, der Querschnitt sei als Rechteck mit konstanter Breite b und veränderlicher Höhe vorausgesetzt

$$M = P(l-x)$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2}\,, \qquad h = \sqrt{\frac{6P(l-x)}{b\sigma}}$$

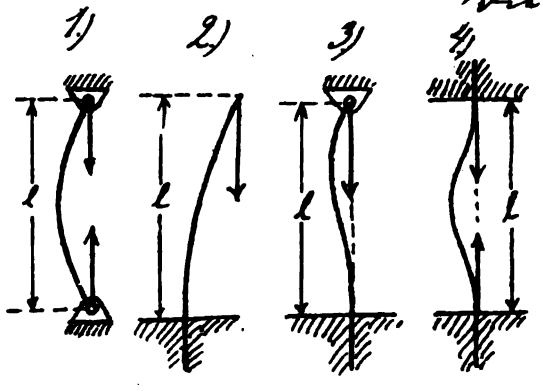
Für den „Einspannungsquerschnitt" ist $x = 0$ und $h_0 = \sqrt{\frac{6Pl}{b\sigma}}$; dann ist $h = h_0\sqrt{\frac{l-x}{l}}$

die Begrenzungskurve ist eine Parabel.

Die excentrische Zug- oder Druckbelastung

einer Stabe lässt sich auf die Zusammenwirken einer centrischen Belastung u. einer Biegung zurückführen. Das Biegungsmoment ist hier gleich dem Produkt aus der Kraft und ihrer Excentricität.

Die **Knickung** ist ein besonderer Fall der excentrischen Druckbelastung. Sie tritt besonders bei schlanken Stäben auf. Es existirt dann eine für den Stab charakteristische, kritische Belastung; unter der die kleinste Störung sich immer weiter vergrössert und schliesslich den Bruch herbeiführt. Dieses Verhalten erklärt sich daraus, dass mit dem wachsenden Moment der inneren Spannungen das äussere Moment durch das gleichzeitige Wachsen seiner Excentricität gleichen Schritt hält. Die Grösse der kritischen Last, der **Knickkraft** hängt von der Art der Befestigung ab. Für einen an den Enden starr befestigten Stab (Fall 1) berechnet sie sich aus der



Formel von Euler:

$$P = \frac{\pi^2 E Q}{l^2} \qquad (6)$$

($\pi = 3{,}14159\ldots$) E Elasticitätsmodul,

für die andern Belastungsarten gelten die Formeln: ad 2: $P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EQ}{l^2}$

ad 3) $P = 2{,}045\,\pi^2 \cdot \frac{EQ}{l^2}$; ad 4) $P = 4\,\pi^2 \cdot \frac{EQ}{l^2}$

Formel 3) und 4) dürfen nur dann angewandt werden, wenn die Endlagen genau und wirklich unverrückbar festgehalten werden. Die geringste Unsicherheit bedingt bereits eine abweichende Berechnung. Nun geht dann immer sicher, wenn man nach 5) rechnet. Da die Knicklast nicht erreicht werden darf, so lässt man in der Praxis der Sicherheit halber nur $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ der Knicklast als Druckbelastung der Stäbe zu.

Torsion

ist die Beanspruchung eines Stabes durch statische Momente, deren Momentenvektor in die Richtung der Stabachse fällt. Bei der Torsion von Stäben mit kreisförmigem Querschnitt bleiben die Querschnitte eben (alle andern Querschnitte werden windschief). Zwei zueinander parallele Radien in den Endquerschnitten bilden nach der

Torsion mit einander einen Winkel, den Verdrehungs- oder Torsionswinkel. Wie eine solche Belastung lehrt, treten im jeden Querschnitt Schubspannungen auf, deren Richtung in allen Punkten senkrecht zum Radius steht und deren Größe der Schubspannung τ des betroffenden Flächenelements vom Mittelpunkt proportional ist. Die größte Schubspannung am Umfang sei τ', dann ist

$$\tau = \frac{x}{r}\tau' \qquad (68)$$

Die Anwendung der Momentensätze liefert die Gleichung, daß dem äußeren Moment M (Torsionsmoment, das Moment aller Schubkräfte in einem Querschnitt Gleichgewicht halten muß. Um letzteres zu erhalten, multipliziert man jede an einem Flächenelement dF wirkende Schubkraft τdF mit ihrem Hebelarm x und summiert über den ganzen Querschnitt. Es ist also:

$$M = \int \tau dF.x \text{ oder wegen Gl. (68):}$$

$$M = \frac{\tau'}{r}\int x^2 dF \qquad (69)$$

das Integral $\int x^2 dF$ ist das polare Trägheitsmoment Θ_p des Querschnitts. Daher ist

$$\tau' = \frac{Mr}{\Theta_p} \qquad (70.)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt, für den diese Betrachtung allein richtig ist, ist

$$\vartheta_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad \text{und daher}$$
$$\tau' = \frac{2M}{\pi r^3} \qquad (71)$$

Anmerkung. Die zulässige Schubspannung wird meist = $\frac{4}{5}$ der zulässigen Zugspannung angenommen.

Die Lehre vom Stoß.

I. Gerader zentraler Stoß.

Der Stoß von zwei Körpern wird gerade genannt, wenn die Körper vor dem Stoß keine Rotation besitzen und ihre Relativbewegung in die Richtung der Berührungsnormalen fällt. Zentral wird der Stoß genannt, wenn die Berührungsnormale durch die Schwerpunkte der beiden Körper geht.

Die Bewegung beim geraden zentralen

Vor, etwa von zwei Kugeln mit den Massen Q_1 und Q_2 und den Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2, sind folgende. Im ersten Augenblick des Vorganges ist die Berührung eine rein geometrische; erfolgt in einem Punkt. Infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten der Kugeln rücken sich die Mittelpunkte näher, und es entsteht an der Berührungsstelle eine Abplattung, durch die an beiden Kugeln gleiche Kräfte, der sog. Stoßdruck hervorgerufen wird. Dieser bewirkt einen Ausgleich der Geschwindigkeiten. Für besseren Überblick teilt man den Vorgang in zwei Perioden, deren erste vom Beginn bis zu dem Augenblick reicht, wo beide Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben.

Nach Gl. (4) ist $Pdt = m dv$ und

$$\int_{t_1}^{t_2} Pdt = m v_2 - m v_1$$

das Zeitintegral des Stoßdruckes (der Impuls) ist eine Maß dem Prinzip der Aktion und Reaktion für beide Körper entgegengesetzt gleich. Ist v_1 die größere Geschwindigkeit, so ist für die Zeit t_x

$$\frac{Q_1}{g} v_{1x} = \frac{Q_1}{g} v_1 - \int_{t_0}^{t_x} P\,dt \quad \text{und}$$

$$\frac{Q_2}{g} v_{2x} = \frac{Q_2}{g} v_2 + \int_{t_0}^{t_x} P\,dt \quad \text{hinzu add.}$$

$$\frac{Q_1}{g} v_{1x} + \frac{Q_2}{g} v_{2x} = \frac{Q_1}{g} v_1 + \frac{Q_2}{g} v_2 , \qquad (72).$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrößen bleibt während des ganzen Stoßvorganges konstant.

Bezeichnet u die gemeinsame Geschwindigkeit nach Ende der ersten Stoßperiode, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$u\,(Q_1 + Q_2) = Q_1 v_1 + Q_2 v_2$$

hieraus

$$u = \frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2} \qquad (73).$$

Die lebendige Kraft beider Körper erfährt bei diesem Vorgang eine Verminderung um einen Betrag V, der sich folgendermaßen berechnet:

$$V = \frac{Q_1 v_1^2}{2g} + \frac{Q_2 v_2^2}{2g} - \frac{(Q_1+Q_2)u^2}{2g} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1+Q_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \qquad (74).$$

Der Energieverlust V hat sich beim Ende der ersten Stoßperiode in Verformungsarbeit umgesetzt. Bei einem plastischen Verhalten der Körper ist damit der Vorgang zu Ende,

die Energieumsatz V ist in Wärme umgesetzt und die beiden Körper bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit w weiter. Bei rein elastischem Verhalten dagegen ist die Formänderungsarbeit als potentielle Energie aufgespeichert und wird in der zweiten Periode wieder in kinetische Energie zurückverwandelt. In diesem Fall ist die Geschwindigkeitsänderung für beide Körper während der zweiten Periode absolut genau so groß wie in der ersten, da $\int_{t_0}^{t_1} P\,dt = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt$ ist.

Für die Geschwindigkeiten v_1 u. v_2 nach Ablauf der Stoßzeit hat man demnach:

$$v_1 + v_1 = 2w; \quad v_1 = 2w - v_1 = \frac{Q_1 v_1 + Q_2(2v_2 - v_1)}{Q_1 + Q_2}$$

$$v_2 = 2w - v_2 = \frac{Q_1(2v_1 - v_2) + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2} \qquad (75).$$

Spezielle Fälle: 1) Wenn $Q_1 = Q_2$ ist, so wird $v_1 = v_2$ und $v_2 = v_1$, d. h. die Körper tauschen durch den Stoß ihre Geschwindigkeiten aus.

2) Ist $Q_2 = \infty$ und $v_2 = 0$, d. h. ist der zweite Körper mit der Erde fest verbunden, so wird $v_1 = -v_1$, der erste Körper wird also mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit zurückgeworfen. —.

der Höchstdruck P ist eine Funktion der Summe der beiden Abplattungen, d. h. eine Funktion der Annäherung der Körpermittelpunkte. Der größte Höchstdruck P_{max} tritt entsprechend der größten Annäherung a am Ende der ersten Stoßperiode auf.

Ganz gleichgültig nimmt man an, der Höchstdruck sei proportional der jeweiligen Annäherung x, etwa Cx. Die zur Formänderung verwandte Arbeit ist dann

$$\int P dx = C \int x^2 dx = \frac{Ca^3}{3} = \frac{1}{2} P_{max} \cdot a,$$

und man findet P_{max}, wenn a bekannt ist, aus der Gleichung

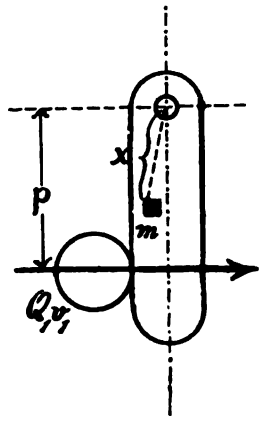
$$\frac{1}{2} a P_{max} = V \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2}} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \qquad (76).$$

Für kugelförmige Berührungsflächen ist zu richtiger, P proportional mit $x^{\frac{3}{2}}$ zu setzen. An Stelle des Faktors $\frac{1}{2}$ auf der linken Seite von Gl. (76) tritt dann der Faktor 2/5.

II. Stoß auf einen drehbar gelagerten Körper (Exzentrischer Stoß).

Der Einfachheit halber sei angenommen, daß der Stoß nur für den einen der beiden Körper exzentrisch sei, und daß außerdem die Winkelgeschwindigkeit des drehbar gelagerten

Körper zu Beginn des Vorgangs = 0 sei. Im vorgand einem Augenblick der ersten Periode da sei sie = w; dann ist für ein Massenteilchen m im Abstand x von der Drehachse die Geschwindigkeit = x w und die Beschleunigung $x\frac{dw}{dt}$, wonach sich die beschleunigende Kraft ergibt zu $m \cdot x\frac{dw}{dt}$ der Momentensatz, auf die Drehachse angewandt ergibt



$$\Sigma\left(mx\frac{dw}{dt}\cdot x\right) = Pp$$ (wobei P den Hebelarm bedeutet), also

$$\Sigma mx^2\cdot\frac{dw}{dt} = Pp$$

da $\frac{dw}{dt}$ in dem betreffenden Augenblick für alle Punkte des Körpers konstant ist, kann es vor das Summenzeichen gesetzt werden; Σmx^2 ist dann das Trägheitsmoment Θ des Körpers bezügl. der Drehachse, es ist also

$$Pdt = \frac{\Theta}{p}dw \text{ und}$$

$$\int Pdt = \frac{\Theta}{p}w', \text{ wobei } w' \text{ die Winkelgeschwindigkeit am Ende der ersten Per. gerade ist. Die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der Einrückungsstellung am Ende der ersten Periode ist } w = p\cdot w', \text{ wonach}$$

$w = \frac{u}{p}$ so ist also

$$\int P dt = \frac{Q}{p^2} u \qquad (77)$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit der Entwicklung von Gl. (72), wird ersichtlich, daß der Stoß genau so erfolgt, wie wenn ein ruhender zentraler Stoß gegen einen Körper von der Masse $\frac{Q}{p^2}$, diese Masse heißt die <u>reduzierte Masse</u>, den ihr entsprechenden reduzierten Gewicht Q_{red} ist daher

$$Q_{red} = \frac{Q}{p^2} g \qquad (78)$$

Alle Gleichungen über den geraden zentralen Stoß sind also auf diesen Fall ohne weiteres anwendbar, wenn nur statt Q_2 das reduzierte Gewicht eingesetzt wird.

Von dem Begriff der reduzierten Masse wird noch bei anderen Untersuchungen ähnlicher Art Gebrauch gemacht.

Bei <u>Hammerwerken</u> stellt der Wert V in Gl (74) die Nutzarbeit dar, wobei Q_1 das Hammergewicht und Q_2 das Ambosgewicht bedeutet. Da $v_2 = 0$ ist, wird

$$V = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Um V möglichst groß zu erhalten, muß

man das Anbringen möglichst groß machen.

Das Verhältnis von Nutzarbeit zur kinetischen Energie des auffallenden Hammers wird der Wirkungsgrad des Schlages genannt (derselbe wurde theoretisch = 1 bei unendlich großem Amboß).

Rammwirkung

Das Einrammen eines Pfahles geschieht der Reihe nach so, daß man ein Gewicht Q (Rammbär) wiederholt von einer Höhe H auf denselben herabfallen läßt; nach einer Anzahl von Schlägen zeigt sich eine gewisse Regelmäßigkeit, der Pfahl weicht bei jedem weiteren Schlag durchschnittlich um eine Strecke x zurück. Es ist nun die Aufgabe zu lösen, aus den bekannten Werten von Q und H und der beobachteten Senkung pro Schlag diejenige Last zu berechnen, welche man dem Pfahl aufbürden darf, ohne ein weiteres Einsinken befürchten zu müssen.

Beim Einrammen verdrängt ein komprimierbarer oder eindringender Pfahl das

Leitungsmaterial seitlich. Der Reibung entstehen die beiderseits gegen Flüssigkeitsschichten und Leitungswand gerichtete Kraft eine Reibung gegen, die sich gegen eine weitere Eindringung als auch einem Herausziehen der Flüssigkeit widersetzt. Gegenüber dieser Reibung kann gegebenenfalls der Widerstand, der sich dem tiefen Eindringen der Flüssigkeit entgegensetzt, vernachlässigt werden.

Das gewählte Verfahren ist das folgende: Man berechnet die Geschwindigkeit w aus der ersten Näherung w aus Gl. (73), wobei Q_1 = Luftgewicht, Q_2 = Flüssigkeit, $v_1 = \sqrt{2gH}$ und $v_2 = 0$ gesetzt wird, und betrachtet dann die gleichförmig angenommene Bewegung des Kolbens gegen die Flüssigkeit, deren Widerstand gefunden wird. Es ist also

$$w = \frac{Q_1 \sqrt{2gH}}{Q_1 + Q_2}, \text{ ferner } \frac{w^2}{2} \frac{Q_2}{g} = Px, \text{ hieraus}$$

die Flüssigkeitsreibung $P = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1+Q_2)^2} \cdot \frac{H}{x}$.

Diese Betrachtung ist aber nur solange zulässig als die Flüssigkeitsreibung klein gegenüber dem Kolbendruck ist.

Deutlicher geht man besser aus der umgekehrten Fragestellung H_0 aus. Bei einer gegebenen Fallhöhe des Kolbens vernachlässigt

der Kopfdruckgerade die Größe der Pfahlreibung. Es wird daher durch einen Schlag auf die Pfähle eine weitere Einsenkung nicht erfolgen, wenn die Pfahlreibung die Pfahllast gerade aufhebt. Man ermittelt also zunächst H_0 durch Versuche und setzt

$$n Q_1 (H - H_0) = P x \qquad (19)$$

worin n die Anzahl der Schläge und x die Gesamteinsenkung während der n Schläge bedeutet. Aus dieser Gleichung wird P ermittelt und ein Bruchteil davon ($\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$) als zulässige Belastung angenommen.

Hydraulik.

Die Mechanik der festen Körper nimmt, indem sie zunächst von dem Stoffe dieser Körper absieht, dieselben in erster Annäherung als starre Körper an.

Die nächste Abstraktion, welche die Hydraulik, nämlich die „vollkommene Flüssigkeit", welche als reibungslos und inkompressibel angenommen wird

Es ist daher bei derselben die Formänderungsarbeit immer gleich Null. Die wirklichen Flüssigkeiten zeigen keineswegs diese Verhalten, sie lassen sich zusammendrücken und sind uns nicht frei von inneren Reibungen; deshalb ist ihr Verhalten mit dem der vollkommenen Flüssigkeit in vielen Fällen ziemlich gut übereinstimmend, in den für die letztere abgeleiteten Formeln muss man kleine Korrektionen angebracht werden.

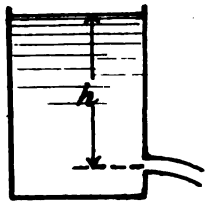
In der reibungslosen (sogenannten reibungsfreien) Flüssigkeit ist an einem und derselben Orte der Druck nach allen Richtungen gleich, derselbe ist in ein und derselben Höhe unter dem Flüssigkeitsspiegel konstant = $h \cdot \gamma$ (γ ist das Gewicht der Volumeinheit).

Ausflussproblem.

Die Ausflussgeschwindigkeit v wird erhalten durch einen Vergleich der arbeitenden kinetischen Energie und der durch Formänderungen verlorengehenden Wärme-Energie. Kann eine Flüssigkeitsmenge vom Gewicht Q ausgeflossen ist, so

ist an dieselbe die kinetische Energie

$\frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$ abgegeben worden.



Gleichzeitig ist der Wasserspiegel etwas gesunken und es ist die gleiche Flüssigkeitsmenge in der Höhe h über der Ausflussöffnung verschwunden, um den durch das Ausfließen freiwerdenden Raum auszufüllen. Die in der Flüssigkeit enthaltene potentielle Energie ist also um den Betrag $Q \cdot h$ abgenommen. Durch Gleichsetzen der beiden Beträge erhält man:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = Qh, \quad \text{hieraus}$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (80)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Geschwindigkeit ebenso groß ist, wie die eines nur der Höhe h freifallenden Körpers.

Es bei der vollkommenen Flüssigkeit, in Wirklichkeit findet sich wegen der Flüssigkeitsreibung:

$$v = c\sqrt{2gh}. \qquad (81)$$

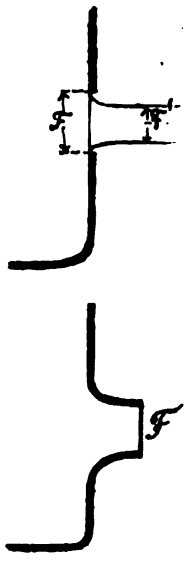
Für Wasser ist c je nach der Gestalt der Mündung 0,95 - 0,97.

Die stündliche <u>Ausflußmenge</u> Q wird erhalten, indem man das Volumen

der Wasserzylinders benutzt, der sich in der Zeiteinheit beschreibt:

$$Q = F' v$$

Als Querschnitt der Wasserstrahls darf nicht ganz ohne allgemeinen nicht der Öffnungsquerschnitt F gesetzt werden, da der Strahl nach dem Austritt noch eine Kontraktion erleidet; der Querschnitt F' nach der Kontraktion kann gesetzt werden



$$F' = c' F$$

worin c' eine von der Gestalt der Mündung abhängige Konstante ist. Ist die Mündung ein Loch in dünner Wand, so ist c' im Mittel = 0,64. Hat eine trichterförmige Mündung (wie in nebenstehender Figur) $\alpha = 1$ genommen, d. h. die Kontraktion ganz vermieden werden, die Ausflussmenge ist dann

$$Q = c' F . v = c' F . c \sqrt{2gh}.$$

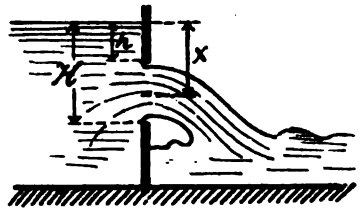
Werden die Konstanten $c . c'$ in eine Konstante K zusammengefasst so ergibt sich die Formel: $Q = K . F \sqrt{2gh}$ (82)

Diese Formel ist richtig, solange die Dimensionen der Ausflussöffnung klein sind gegenüber der Druckhöhe.

Ist dies nicht der Fall, so findet folgende Rechnung zum Ziel:

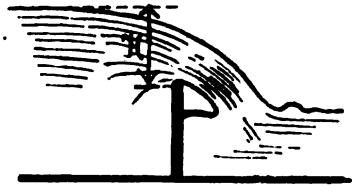
Ist h die Druckhöhe an der tiefsten Kante der Öffnung, H die an der höchsten, x die an einer beliebigen anderen Kante, so ist

$$Q = K \int_h^H b\,dx\sqrt{2gx},$$ für eine rechteckige Öffnung von der konstanten Breite b ist



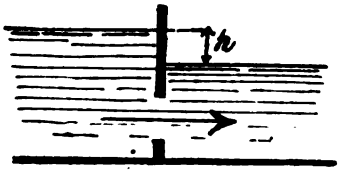
a) $$Q = Kb\sqrt{2g}\int_h^H dx\sqrt{x} = \tfrac{2}{3}Kb\sqrt{2g}\,(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}})$$ (83)

diese Formel ist anwendbar auf Überfälle, wo bei dann $h = 0$ zu setzen ist.



b) $Q = \tfrac{2}{3}Kb\sqrt{2g}\cdot H^{\frac{3}{2}} = K'bH\sqrt{2gH}$,

wobei $K' = \tfrac{2}{3}K = 0{,}45 - 0{,}5$ zu setzen ist.



Bei Ausfluss unter Wasser ist der Druckhöhenunterschied an allen Kanten gleich. Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel, daher

c) $Q = K'F\sqrt{2gh}$.

Ausflußzeit. Die Frage nach der Zeit, die nötig ist, damit ein Gefäß sich durch eine Öffnung in Luft entleert, kann folgender. maßen gelöst werden.

Während der Zeit dt entströmt der Öffnung die Wassermenge $dt \cdot Kf\sqrt{2gh}$, dabei sinkt der Wasserspiegel um dh. Bezeichnet F die jeweilige Größe der freien Wasseroberfläche (im allgemeinen eine Funktion von h), so ist

$$-F\,dh = Kf\,dt\sqrt{2gh}$$

$$\int_0^h \frac{F\,dh}{\sqrt{h}} = Kf\sqrt{2g}\,t, \quad t = \frac{1}{Kf\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{F\,dh}{\sqrt{h}}$$

Für ein zylindrisches Gefäß ist F konstant, daher $t = \frac{F}{Kf\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2F}{Kf}\sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{F\sqrt{2gh}}{Kfg} = \frac{Fv}{Kfg}$

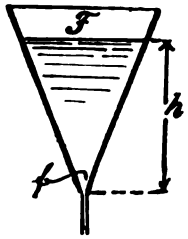
(v Ausflußgeschw. beim Beginn des Ausflusses).

Bei einem kegelförmigen Gefäß ist

$$F = Ch^2, \text{ also}$$

$$t' = \frac{C}{Kf\sqrt{2g}} \int_0^h h^2 dh = \frac{2Ch^2}{5Kf}\sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{Fv_0}{5Kfg}$$

(F und v sind die Anfangswerte).



Reaction des ausfließenden Strahls.

Die Repulsivkraft aller Wandschichten einer in einem ruhenden Gefäß befindlichen ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht auf ihrer Fläche gerichtet. Wird nun in einer Seitenwand eine Ausflußöffnung freigegeben, so fällt einmal der auf dieser lastende Druck fort und außerdem wird in der Nachbarschaft der Öffnung der Druck vermindert. Dadurch wird das Gleichgewicht der Wandschichten gestört, es tritt eine der Ausflußrichtung entgegengesetzte Kraft auf, die „Reaktion des ausfließenden Strahls." Um ihre Größe zu finden, verfährt man zur Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeiten, indem man sich das Gefäß eine gleichförmige Bewegung erteilt denkt, mit der Geschwindigkeit v entgegengesetzt der Ausflußrichtung.

Das Wasser verliert dann beim Austritt seine ganze Geschwindigkeit. Ist Q die sekundlich ausfließende Wassermenge, so ist nach Vorhergehendem einer einer Stunde einer Wassermenge Q ihre kinetische Energie

entgegen wirken und während ist eine Verschiebung a um die Höhe h gesunken. Nach dem Prinzip der Arbeiten muß also die stündliche Arbeit der Reaktionskraft R den stündlichen Verlusten an kinetischer und potentieller Energie gleich sein.

$$R.v = \frac{Q\gamma}{g}.\frac{v^2}{2} + Q\gamma h$$

(γ ist das Gewicht der Volumeinheit).

$$R.v = Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} + h\right)$$

Wird die Verschreibung vernachlässigt, so ist, wenn F den effektiven Ausflußquerschnitt bedeutet,

$Q = Fv$ und $\frac{v^2}{2g} = h$, also

$\underline{R = 2F\gamma h}$, d.h. die Reaktion ist gleich dem hydrostatischen Druck auf die doppelte Fläche des effektiven Ausflußquerschnitts. Durch die Reibungsverluste wird die Wirkung entsprechend verringert.

Ende.

Inhaltsverzeichnis.

Pag.

Die elementaren Operationen der Rechnung mit Vektoren.

Begriff der Vektor I
Addition von Vektoren IV
die Grundvektoren i, j und k V
das skalare Produkt VIII
das Vektorprodukt XI
Produkte aus 3 Vektoren XVIII
Differentiation der Vektoren XXIII
Integration XXIV

Technische Mechanik

Begriff der Mechanik 1
Mechanik des materiellen Punktes 3
Trägheitsgesetz 3
Beziehungen zwischen Weg, Geschwindig. Zeit und Beschleunigung 4
dynamische Grundgleichung 6
Lebendige Kraft 8
Gradlinige Bewegung 9
Zusammensetzung von Bewegungen 12
Kräftedreieck, Kräftepolygon 15
Projektionssatz 17
Bewegungsgleichungen von Lagrange 19
Centripetal- u. Tangentialkraft 21

aufgegeben werden und überdem ist eine Vorrichtung A um die Höhe h gehoben. Nach dem Prinzip der Arbeiten muß also die stündliche Arbeit der Reaktionskraft R der stündlichen Verbrauch an kinetischer und potentieller Energie gleich sein.

$$R.v = \frac{Q\gamma}{g}.\frac{v^2}{2} + Q\gamma h$$

(γ ist das Gewicht der Volumeinheit).

$$R.v = Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} + h\right)$$

Wird die Wasserreibung vernachlässigt, so ist, wenn F den effektiven Ausflußquerschnitt bedeutet,

$Q = Fv$ und $\frac{v^2}{2g} = h$, also

$\underline{R = 2F\gamma h}$, d.h. die Reaktion ist gleich dem hydrostatischen Druck auf die doppelte Fläche des effektiven Ausflußquerschnitts. Durch die Reibungswiderstände wird die Wirkung natürlich verringert.

Ende.

Inhaltsverzeichnis.

Pag.

Die elementaren Operationen der Rechnung mit Vektoren.

Begriff der Vektoren I
Addition der Vektoren IV
die Grundvektoren i, j und k V
das skalare Produkt VIII
das Vektorprodukt XI
Produkte aus 3 Vektoren XVIII
Differentiation der Vektoren XXIII
Integration XXIV

Technische Mechanik

Begriff der Mechanik 1

Mechanik des materiellen Punktes 3

Trägheitsgesetz 3
Beziehungen zwischen Weg, Geschwindig. Zeit und Beschleunigung 4
dynamische Grundgleichung 6
Lebendige Kraft 8
geradlinige Bewegung 9
Zusammensetzung von Bewegungen 12
Kräftemechanik, Kräftepolygon 15
Projektionssatz 17
Bewegungsgleichungen von Lagrange 19
Centrigetal- u. Tangentialkraft 21

Zentrifugalkraft 24
Begriff der Arbeit 27
Einheit der virtuellen Geschwindigkeiten .. 29
Momentensatz 33
Dimensionen der Größen in d. Mechanik 38
Lagerung auf vorgeschriebener Bahn 39
1. die schiefe Ebene 41
2. das konische Pendel 43

Mechanik des starren Körpers

Begriff des starren Körpers 44
Lagerung des starren Körpers 45
Kräfte am starren Körper 52
Einheit der Aktion und Reaktion 52
Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper 55
Zusammensetzung von Kräften am starren Körper 58
das Kräftepaar 62
Parallelverschiebung einer Kraft 65
Geschichtete starre Körper 66

Die Lehre vom Schwerpunkt 69

Schwerpunkt von Linien 74
Schwerpunkt von Flächen 77
Guldinsche Regel 81
Stabiles, labiles u. indifferentes Gleichgewicht 82
Satz von der Lagerung des Schwerpunkts 85
Lebendige Kraft eines starren Körpers 87

Trägheitsmoment 88
Gleichförmige Rotation um eine feste Achse 91
Der Drehungsimpuls oder Impulsmoment 93
Reibung 99
Gleitende Reibung 100
Zapfenreibung 106
Rollende Reibung 109
Schnur-Reibung 111
Keil- (Riemen-) Reibung 112
Keilschärfigkeit 115
Schraubenreibung 118
Energie 122
Festigkeitslehre
Allgemeines 126
Zugfestigkeit 128
Druckfestigkeit 134
Schubfestigkeit 137
Biegungsfestigkeit 138
Knickfestigkeit 145
Torsionsfestigkeit 146
Lehre vom Stoß
Gerader centraler Stoß 148
Excentrischer Stoß 152
Hammerarbeit 154
Rammwirkung 155

Hydraulik 157
Ausflussproblem 158
Reaktion eines ausfließenden Wassers 163

ENGINEERING LIBRARY

TA 350 .L56 1897 C.1
Die Grundlehren der technische
Stanford University Libraries
3 6105 030 427 004

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004